

令和元年6月25日現在

機関番号：32629

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04796

研究課題名(和文) 簡約群上の球関数と局所ゼータ積分の明示的研究

研究課題名(英文) Explicit study on spherical functions on reductive groups and archimedean zeta integrals

研究代表者

石井 卓 (Ishii, Taku)

成蹊大学・理工学部・教授

研究者番号：60406650

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：保型L関数に対して知られている様々な積分表示のうち、以下の積分表示に対して、アルキメデスゼータ積分の計算を実行した。(イ) $GL(n)$ の標準L関数に対するGodement-Jacquet積分(複素素点)、(ロ) $GL(4)$ の3つのL関数の積、 $GSp(2) \times GL(2)$ の2つのL関数の積に対するPollach-Shah積分、(ハ) $GL(4)$ の2次外積L関数に対するJacquet-Shalika積分、(ニ) $GSp(2)$ のスピンールL関数に対するNovodvorsky積分、(ホ) $GSp(2)$ の標準L関数、スピンールL関数の積に対するBump-Friedberg-Ginzburg積分

研究成果の学術的意義や社会的意義

保型形式という高い対称性を兼ね備えた関数に対するゼータ関数(保型L関数)は、様々な整数論的なゼータ関数と結びつくと考えられている重要な研究対象である。保型L関数を積分表示式によって研究する上でネックとなるのが「悪い素点」における解析であり、そのうち無限素点における研究をゼータ積分を直接計算することで実行した。

研究成果の概要(英文)：Among various integral representations for automorphic L-functions, we compute the following archimedean zeta integrals: (a) Godement-Jacquet integrals for standard L-functions on $GL(n)$ over the complex local field, (b) Pollach-Shah integrals for product of three L-functions on $GL(4)$ and product of two L-functions on $GSp(2) \times GL(2)$, (c) Jacquet-Shalika integrals for exterior square L-functions on $GL(4)$, (d) Novodvorsky integrals for spinor L-functions on $GSp(2)$, (e) Bump-Friedberg-Ginzburg integrals for product of spinor and standard L-functions on $GSp(2)$.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 保型L関数 アルキメデスゼータ積分 Whittaker関数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

様々な数論的ゼータ関数と結びつくと考えられている保型形式のゼータ関数(保型 L 関数)は、整数論における重要な研究対象の一つである。保型 L 関数の積分表示(ゼータ積分)は、その解析的性質の研究において必要不可欠なものであり、これまでに種々の保型 L 関数に対して、ゼータ積分が発見され続けてきている。多くの(大域)ゼータ積分は局所ゼータ積分の積に分解されるが、無限素点や分岐有限素点における局所ゼータ積分の取り扱いの困難さゆえに、保型 L 関数の大域的性質が満足に得られていない場合が少なくない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、無限素点における局所ゼータ積分、すなわちアルキメデスゼータ積分を実簡約群上の一般化球関数の明示公式を用いて直接計算し、(完備化された)保型 L 関数の正則性や極の位置、関数等式などの基本的かつ重要な性質を導き出すことである。

またこの一般化球関数そのものは、実簡約群の表現論や多変数特殊関数論の観点からも興味深い研究対象であり、明示公式に対して何らかの統一的な解釈を模索する。

3. 研究の方法

第一段階は、実簡約群上の一般化球関数の明示公式の導出である。対象となる表現空間の構造を調べることにより得られる、一般化球関数を特徴付ける偏微分方程式系の解空間の解析を行うか、もしくは Jacquet 積分のような一般化球関数に対する積分表示式の変形を行うことにより明示公式を与える。特に Mellin-Barnes 型の積分表示式がゼータ積分の計算において有用であると考えられる。

第二段階は、一般化球関数の積分変換である局所ゼータ積分を計算し、局所 Langlands 対応から決まる局所 L 因子を取り出すことである。さらに局所関数等式を示し、分岐有限素点での結果がある状況においては、大域的な L 関数の関数等式、極の情報などを得ることが可能になる。「ユニポテント積分」を含まないようなアルキメデスゼータ積分に対しては、局所 L 因子と一致するような表現空間内のベクトルの存在が期待され、それらを明示的に与えることは応用上重要である。またユニポテント積分を含む場合には、アルキメデスゼータ積分が別の一般化された球関数と関連づくと期待できることがある。

4. 研究成果

以下の状況において、一般化球関数の明示公式の導出や、既知の保型 L 関数の積分表示に対するアルキメデスゼータ積分の計算を行った。

- (1) $GL(n)$ の標準 L 関数に対する Godement-Jacquet 積分の複素素点における計算を実行し、Tate の学位論文における $GL(1)$ の場合と同様に、局所 L 因子を実現するような行列係数、Schwartz 関数の組を具体的に与えた(論文)。
- (2) $GL(4)$, $GSp(2) \times GL(2)$ 上の L 関数に対する Pollach-Shah 積分を、無限素点においてクラス 1 主系列表現を生成している場合に、 $GSp(2, F)$, $GL(4, F)$ ($F=R, C$) 上のクラス 1 Whittaker 関数の Mellin-Barnes 型積分表示式を用いて計算した。不分岐有限素点における結果と同様に、 $GL(4)$ の場合は 3 つの L 関数の局所 L 因子の積に、 $GSp(2) \times GL(2)$ の場合には 2 つの L 関数の局所 L 因子の積に一致することを示した(論文)。
- (3) $GL(4)$ の 2 次外積 L 関数に対する Jacquet-Shalika 積分を、無限素点においてクラス 1 主系列表現を生成している場合に計算した。また Shalika 関数を特徴づける 2 変数の偏微分方程式系を導き、アルキメデスゼータ積分が、局所 L 因子と Shalika 関数のある 1 パラメータ部分群への制限の積になることを示した。
- (4) $GSp(2)$ のスピノール L 関数に対する Novodvorsky のゼータ積分は Whittaker 関数の積分変換である。 $GSp(2, R)$ 上の Whittaker 関数の明示公式は、この 25 年ほどの様々な研究により Siegel 放物部分群から誘導された一般化主系列表現以外の場合は明らかにされていた。この残った場合に、偏微分方程式系の解析を通じて、主系列表現の明示公式と関連付けることにより Whittaker 関数の明示公式を与え、さらにアルキメデスゼータ積分を計算した。これまでの種々の結果と合わせて、 $GSp(2)$ の生成的な保型表現に対するスピノール L 関数の正則性の積分表示による証明が確立されたことになる(論文)。
- (5) $GSp(2)$ の Whittaker 関数の明示公式を用いて、2 つの L 関数(標準 L 関数、スピノール L 関数)の積に対する Bump-Friedberg-Ginzburg 積分の実素点における計算に取り組んだ。実素点において、主系列表現、Jacobi 型放物部分群から誘導された一般主系列表現、大き

な離散系列表現を生成している場合に、アルキメデスゼータ積分と局所 L 因子の積の一致を示した。

- (6) (平野幹氏、宮崎直氏との共同研究) $GL(3) \times GL(2)$ 上の標準 L 関数に対する Jacquet-Shalika-Piatetski-Shapiro 積分を、無限素点に現れるすべての表現の組に対して、我々によって得られた Whittaker 関数の明示公式を用いてアルキメデスゼータ積分と局所 L 因子が一致する Whittaker 関数の組を与えた(論文、)。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計8件)

Miki Hirano, Taku Ishii and Tadashi Miyazaki, Archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$, *Memoirs of the American Mathematical Society* (to appear), 査読有。

Taku Ishii, Whittaker functions for generalized principal series representations on $GSp(2, R)$, *Journal of Functional Analysis* 276 (2019), 284-327, 査読有, 10.1016/j.jfa.2018.09.011

Taku Ishii, The computation of multivariate archimedean zeta integrals on $GL_2 \times GSp_4$ and GL_4 , *Proceedings of the American Mathematical Society* 147 (2019), 103-114, 査読有, 10.1090/proc14211

Taku Ishii, Godement-Jacquet integrals on $GL(n, C)$, *Ramanujan Journal* 49 (2019), 129-139, 査読有, 10.1007/s11139-018-0025-8

Taku Ishii, Archimedean zeta integrals for the exterior square L-functions on GL_n , *Journal of Number Theory* 186 (2018), 304-345, 査読有, 10.1016/j.jnt.2017.10.007

Taku Ishii, Whittaker functions on $Sp(2, R)$ and archimedean zeta integrals, 京都大学数理解析研究所講究録 2036 「保型形式・保型的 L 関数とその周辺」 (2017), 1-7, 査読無

Taku Ishii, Archimedean zeta integrals on $GL(n)$, 早稲田大学整数論研究集会 2016 報告集(2016), 99-107, 査読無

Miki Hirano, Taku Ishii and Tadashi Miyazaki, The archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$, *Proceedings of Japan Academy Series A* 92 (2016), 27-32, 査読有, 10.3792/pjaa.92.27

[学会発表](計9件)

石井卓, Archimedean zeta integrals for $GL(n)$, 早稲田大学整数論セミナー, 早稲田大学, 2018年10月26日.

石井卓, A remark on archimedean zeta integrals and Shalika functions on $GL(4)$, Automorphic forms/representations on covering groups, 岡山大学理学部, 2018年3月22日.

石井卓, Whittaker functions on $Sp(2, R)$ and archimedean zeta integrals, 19th Autumn Workshop on Number Theory, Archimedean local theory of automorphic forms, 白馬ハイマウントホテル, 2016年11月3日.

石井卓, Archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$, 保型 L 関数の特殊値と付随する p 進 L 関数, 京都府南丹市美山町自然文化村, 2016年9月21日.

石井卓, Archimedean zeta integrals on $GSp(2)$, Modular forms and period integrals, 東京大学数理科学研究科, 2016年9月14日.

石井卓, Archimedean zeta integrals on $GL(n)$, 早稲田大学整数論研究集会, 早稲田大学, 2016年3月22日.

石井卓, Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$ and archimedean zeta integrals, 保型形式・保型的 L 関数とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 2 月 1 日.

石井卓, Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$ and archimedean zeta integrals, Moduli spaces of abelian varieties and curves, and related analysis, 東京大学数理科学研究科, 2015 年 12 月 17 日.

石井卓, Archimedean zeta integrals for generic cusp forms on $GSp(2)$, Kyoto conference on Automorphic forms, 京都大学理学部, 2015 年 6 月 28 日.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。