

令和 2 年 5 月 13 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04798

研究課題名(和文)非アーベル拡大体の計算整数論的研究

研究課題名(英文)Computational study on non-abelian extensions

研究代表者

木田 雅成(Kida, Masanari)

東京理科大学・理学部第一部数学科・教授

研究者番号：20272057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の当初の目標は代数体の非アーベル拡大のうち良い性質をもつものを計算機を使って効率的に構成することであった。しかし研究をすすめるうちに、ガロア群の同質類に着目するというアイデアに導かれて、目標よりも大きな成果を得ることができた。一番小さな非アーベル群の同質類に入る群をガロア群にもつ拡大の構成やその性質の探求を行った。また位数16の2面体群を含む同質類についても、研究をおこない二つの同質類の間におおきな差異があることを発見できた。これらの結果はガロア拡大の研究の新たな方法を与える。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ガロア群が非アーベル群になる非アーベル拡大の研究は整数論にとっての大きな課題である。保形表現との関連の研究が大いに進んでいるが、この研究では、ガロア群の同質類という同型類よりも弱い類別に着目し、同じ同質類にはいる拡大体の類似、異なる同質類にはいる拡大体の差異などを主に代数的な手法を使って研究した。このような手法を使った研究はこれまでになく、さらに幾つかの興味深い結果も得られていることから、今後もこの方法は有効に活用されていくものと考えている。

研究成果の概要(英文)：The first aim of the research was constructing non-abelian extensions with simple arithmetic

by using computational number theory, but in the course of research I found that the notion of isoclinism of finite groups helps a lot to study and construct extensions of number fields and the result is more fruitful than expected. We studied the smallest isoclinism class of non-abelian group and found that they several important common properties and also studied the isoclinism class containing the dihedral group of order 8 and found some significant difference between the classes. These results develop a new method of studying Galois extensions.

研究分野：整数論

キーワード：ガロア群 ガロア拡大 同質類 非アーベル拡大 逆ガロア問題

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

代数体の拡大体の性質はそのガロア群の同型類によって大きく異なる。ガロア群がアーベル群の場合には 20 世紀初頭に確立された類体論があって、その性質を詳しく調べることができる。一方、ガロア群がアーベル群でない場合にはその分類理論をつくることは整数論の中心的な課題であり、様々な研究が行われてきたが、現状では保形表現に関する Langlands プログラムを中心に研究は進展している。しかしながら、大きな部分は予想として残されており、解決にはまだ時間がかかると思われる。この研究では、もう少し別の方向から代数体の非アーベル拡大について研究しようと考えた。

### 2. 研究の目的

ガロア表現が奇の 2 次元の表現をもつときには Serre の保形性予想が解かれていることから、そのアルティン L 関数に対応する保形形式をしらべることは理論的には可能である。しかしながら、その実例は非常に限られたものであり、また偶の表現の場合の例はほとんど知られていなかった。

そこで、本研究では、そのようなガロア表現の像となる有限次のガロア群を分類し、それをガロア群として持つような非アーベル拡大で、様々な実験に使えるような性質のよいもの(例えば分岐が少ないなど)を計算整数論の方法を使って、組織的に構成し、それに対応するアルティン表現や保形形式を調べたりすることを目標に掲げた。

### 3. 研究の方法

上で述べたように、まず二次元ガロア表現の像になるような有限群を計算機を使ったり、既存の理論を使って調べることから始めた。そのようなガロア群の分類の基礎となる有限群の表現論、特に射影表現や Schur Multiplier の知識をもとに、群の同型類では捉えられない性質を探求した。それが後に述べる群の同質類である。

さらに、与えられた群をガロア群にもつ拡大を構成する逆ガロア問題のこれまでの成果を応用することにより、分岐などの数論的情報をコントロールのできるようなガロア拡大体の構成法を研究した。

また代数体の性質にとって、あるいはガロア表現の性質にとって、複素共役がどの共役類に属するかは大きな問題であることので、複素共役の位置を固定したガロアの逆問題にもとりくんだ。特にさまざまな非アーベル群をガロア群にもつ CM 体の構成にとりくんだ。

### 4. 研究成果

表現次元によるガロア群の分類を行うにあたってはその射影表現に注目する必要がある。そして群の射影表現では群の同質類の概念が自然に生じる。同質類は同型類よりもはるかに弱い分類ではあって、位数の異なる群が同質になったりする。実際、一番小さな群の同質類はすべての有限アーベル群のなす同質類である。この同質類の概念は有限群、とくに 2 群の分類には有効に活用されてきた。

その一方で位数 8 の 2 面体群をガロア群にもつ拡大の性質を一般的な文脈で調べている中で、同質類という概念が自然に登場してきて数論と群論が結びつくことになった。同質類でガロア群を分類すると、その有限次のガロア表現の射影像は一意的に定まるので、これは自然な分類を与えているといえる。

この同質類の概念を使うことで、次のような成果を得た。

- (1) 二次元ガロア表現をもつガロア拡大の分類、あるいは持たないものの例をあげることに成功した。またその表現が奇表現になるかどうかを複素共役の位置で判定することができることがわかった。
- (2) 最小の非アーベル群の同質類である位数 8 の 2 面体群の同質類を詳しく調べ、そのアルティン L 関数を統一的方法でしらべた。
- (3) 位数 16 の 2 面体群を含む同質類を調べ、その中に対応する保形形式が非常に珍しい性質をもつ 32 次拡大体を見つけた。
- (4) 同質類に含まれる二つの群の間の逆ガロア問題の関係について研究した。一方のガロア逆問題がとければ、もう一方のガロア逆問題も比較的簡単にとけるという内容である。これはガロア逆問題の中の automatic realizability という概念と密接に関連する。

- (5) ガロア群の同質類の研究を二元二次形式での素数の同時表現の問題について応用した。これまで幾つかの論文で散発的に得られてきた結果を、ガロア理論的に見直し、その中に同質類の概念が深く関連することを発見した。それにより、網羅的な形で定理を拡張することに成功した。

以上の成果はこれまで知られていなかったものであり、幾つかの学術論文としてすでに成果を発表している。さらに、この研究からは、将来の研究につながる研究テーマも生み出されてきており、今後の一層の研究の発展が期待出来る状況になっている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kida, Masanari and Sudo, Yusuke	4. 巻 53
2. 論文標題 On two-dimensional Galois representations with squarefree conductor	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 SUT J. Math.	6. 最初と最後の頁 73-85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Masanari Kida and Norihiko Namura	4. 巻 173
2. 論文標題 On Artin L-functions of certain central extensions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 147-169
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2016.09.031">http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2016.09.031</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masanari Kida	4. 巻 44
2. 論文標題 On CM-types of Galois CM-fields without proper CM-subfields	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales mathématiques du Québec	6. 最初と最後の頁 165-171
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s40316-018-00111-0">https://doi.org/10.1007/s40316-018-00111-0</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masanari Kida and Genki Koda	4. 巻 191
2. 論文標題 Isoclinism classes of Galois groups of number fields	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 115-149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) DOI: 10.4064/aa180213-6-12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroto Horiba, Masanari Kida, Genki Koda	4. 巻 213
2. 論文標題 Galois theoretic study on simultaneous representation of primes by binary quadratic forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 370-387
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.jnt.2019.12.014">https://doi.org/10.1016/j.jnt.2019.12.014</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masanari Kida, Hiromichi Yanai	4. 巻 235-340
2. 論文標題 CM-types with large index of degeneracy	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of number theory	6. 最初と最後の頁 235-340
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1142/S1793042120500177">https://doi.org/10.1142/S1793042120500177</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 代数体のガロア群の同質類とその数論
3. 学会等名 2018大分鹿児島整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 ガロア群の同質類
3. 学会等名 新潟代数セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 ガロア群の同質類について
3. 学会等名 神楽坂代数セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 国府田玄基, 木田雅成
2. 発表標題 D8 を含む同質類に含まれる群をガロア群を持つガロア拡大について
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 ある中心拡大の Artin L 関数について
3. 学会等名 新潟代数セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 ある中心拡大の Artin L 関数について
3. 学会等名 愛知数論セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 ある中心拡大の Artin L 関数について
3. 学会等名 愛知数論セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 GL(2,3)拡大について
3. 学会等名 香川セミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 木田雅成
2. 発表標題 冪根を含まない体のクンマー理論について
3. 学会等名 第27回整数論サマースクール（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木田雅成，柳井裕道
2. 発表標題 退化指数の大きいCMタイプの計算
3. 学会等名 香川セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<http://www.rs.tus.ac.jp/kida/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----