様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １４ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５K０４８０４

研究課題名（和文）良い性質をもつ概均質ベクトル空間の研究

研究課題名（英文）Study on prehomogeneous Vector Spaces with good property

研究代表者
木村　達雄（KIMURA, TATSUO）

筑波大学・数理物質系（名誉教授）・名誉教授

研究者番号：３００２２７２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：簡約可能代数群が作用し稠密開軌道の余集合が既約超曲面になっている概均質ベクトル空間は良い性質を持ち、佐藤幹夫・新谷卓郎により関数等式を持つ解析的な１変数ゼータ関数が構成され、リーマンのゼータ関数の一般化になっている。既約な場合は、この性質をもつ概均質ベクトル空間は佐藤幹夫・木村達雄により完全に分類されている。本研究では、少なくとも一つの既約成分は自明概均質ベクトル空間と裏返し同値ではない、という条件のもとで、この良い性質を持つ非既約な概均質ベクトル空間を完全に分類した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
素数の研究で重要なリーマンのゼータ関数が関数等式を満たす原因の一つに、ある多項式の複素べきのフーリエ変換が本質的にまた多項式の複素べきになっている事実がある。佐藤幹夫は、多項式が大きな群の作用に関して相対不変式である場合に、そのような性質を持つことをつきとめて概均質ベクトル空間の理論を作った。とくに群が簡約可能代数群で、その稠密軌道の余集合が既約超曲面になっている場合に、良い性質を持つ概均質ベクトル空間とよぶ。この場合に関数等式を満たす１変数概均質ゼータ関数がリーマンのゼータ関数の一般化として新谷卓郎らによって得られる。この良い概均質ベクトル空間を具体的に求めるのが目的である条件で分類出来た。

研究成果の概要（英文）：A reductive prehomogeneous vector space whose singular set is an irreducible hypersurface, has good property. Mikio Sato and Takuro Shintani constructed an analytic zeta function of one variable as a generalization of a Riemann's zeta function. In the irreducible case, such prehomogeneous vector spaces are completely classified by M. Sato and T. Kimura. In this reseach, we complete the classification of such non-irreducible prehomogeneous vector spaces under the condition that at least one irreducible component is not castling equivalent to a trivial prehomogeneous vector space.

研究分野：代数学

キーワード：概均質ベクトル空間

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

数論で基本的な役割を果たすリーマンのゼータ関数は関数等式を満たすという大きな特徴があり、その証明は色々知られているが、その一つの原理として、一番簡単な多項式 f(x)=x の複素べき f(x)^{s-1}すなわち f(x)の(s-1)乗（ここで s は、複素数）のフーリエ変換が、ガンマ因子などを除いて本質的に他の多項式 f*(y)=y の複素べき f*(y)^{-s}に一致するという事実がある。ここで収束の問題は、例えば超関数とみなせば解決する。

同様に n 変数の 2 次形式 P(x)の複素べき P(x)^{s-n/2}のフーリエ変換が本質的にその双対 2 次形式 Q(y)の複素べき Q(y)^{-s}になり、これがエプシュタインのゼータ関数が関数等式を満たす根拠になっている。

そこで、ある有限次元ベクトル空間 V 上の多項式 f(x)の複素べきのフーリエ変換、これは V の双対ベクトル空間 V*上の関数と考えられるが、これが V*上のある多項式 f*(y)の複素べきにガンマ因子などを除いて一致するような多項式の組 f(x)と f*(y)が新しく見つかれば、関数等式を満たす新しいゼータ関数が発見されることが期待される。

佐藤幹夫は、この現象の背景に、大きな群の作用があることを見抜いて概均質ベクトル空間の概念を導入して一般論を構成した。
とくに群 G が簡約可能代数群で、n 次元ベクトル空間 V に作用し、更にある既約超曲面 S={x; f(x)=0}の余集合が、G の稠密な開軌道になっている場合を考える。この場合、特異集合 S は群 G の作用で不変なので、f(x)は唯一つの相対不変式になる。それは斉次多項式であるが、その次数を d とする。
群 G が簡約可能なので、V の双対ベクトル空間 V*に双対表現で作用すると、既約超曲面 S*={y; f*(y)=0}が存在して V*における S*の余集合が G の稠密開軌道になり、f*(y)は（G,V）の d 次の相対不変式である。
１９６０年代に佐藤幹夫は、f(x)の複素べき f(x)^{s-n/d}のフーリエ変換はガンマ因子などを除いて f*(y)の複素べき f*(y)^{-s}と一致することを示した。
さらに、これを使って佐藤幹夫は、関数等式を満たす概均質ゼータ超関数を構成したが、解析的な概均質ゼータ関数の構成は新谷卓郎によって行われて、M.Sato and T.Shintani, Ann of Math. 100(1974),131-170 に発表された。
一番、簡単な概均質ベクトル空間、すなわち GL(1)が１次元ベクトル空間に作用する場合の概均質ゼータ関数が、いわゆるリーマンのゼータ関数である。言い換えれば、概均質ゼータ関数はリーマンのゼータ関数を一般化したものである。

一般の概均質ベクトル空間、すなわち群が稠密な開軌道を持つ、というだけでは、相対不変式が存在しない例も多く、また概均質ベクトル空間の双対表現が概均質ベクトル空間にならない例も沢山ある。
佐藤ー新谷理論が成り立つ概均質ベクトル空間は、簡約可能正則概均質ベクトル空間で唯一つの相対不変式を持つものであり、これこそが本研究で分類しようとする対象である。
具体的な例を与えるたびに、具体的に新しい概均質ゼータ関数が得られるので、この分類は重要であると思われる。

そこで概均質ベクトル空間の分類問題が生じるが、簡約可能ではない代数群はまだ分類されていない状況なので、作用する代数群が簡約可能である、という条件をつけるのは自然であり、また必要な条件である。
任意の代数群の既約表現による像は、簡約可能代数群になるので、既約外均質ベクトル空間の分類を考えるには、最初から群が簡約可能であると仮定しても一般性を失わない。
佐藤幹夫は既に１９６０年代から、既約概均質ベクトル空間の分類に取りかかったが、最初は「量が多すぎてどうして良いかわからない」と言っていた（井草準一教授・談）。
そのうち佐藤幹夫は、群Ｇと有限次元ベクトル空間ＶへのＧの表現ρの三つ組み(G, ρ,V)に対して、三つ組 (G×GL(n), ρ⊗Λ₁, V⊗V(n))が概均質ベクトル空間になる必要十分条件は、三つ組 (G×GL(m-n), ρ*⊗Λ₁, V*⊗V(m-n))が概均質ベクトル空間になることを発見した。　ここで m = dim V > n≧1、（ρ*、V*）は、（ρ、V）の双対表現である。これを互いに他の裏返し変換(castling form) と言う。例えば、三つ組(G,ρ,V)が概均質ベクトル空間ならば、スカラー倍を増やした三つ組(G×GL(1), ρ⊗Λ₁, V⊗V(1))も概均質ベクトル空間であるから、新しい概均質ベクトル空間(G×GL(m-1), ρ⊗Λ₁, V⊗V(m-1))が得られる。ここで m＝dimＶである。何回かの裏返し変換で互いに移りあうとき、裏返し同値(castling equivalent)というが、その中で一番空間の次元が低いものを、被約(reduced)とよぶ。

佐藤幹夫は、この裏返し変換を使って reduced な三つ組の表を得ることが出来たが、それらが実際に概均質ベクトル空間か否かが未決定なものが、かなり残っていた。それは木村達雄により解決されて、１９７７年には、それにより既約概均質ベクトル空間の分類は完成した。正確には、既約概均質ベクトル空間の分類は reduced な既約概均質ベクトル空間の表を与えたという内容である。

裏返し変換でフーリエ変換がどう変化するかも新谷卓郎により明らかにされたので、reduced な場合を調べれば、その無限個の裏返し変換の情報もすべて得られることがわかった。従って、reduced な概均質ベクトル空間を求めれば、分類の目的は達成される。

既約でない場合は、最初から作用する代数群が簡約可能代数群である、と仮定しなければ不可能である。

二つの概均質ベクトル空間(G,ρ,V) と (H,σ,W)の直和(G,ρ,V) ⊕ (H,σ,W)=(G×H, ρ⊗ 1+1⊗σ,V+W)は常に概均質ベクトル空間であるから､非既約概均質ベクトル空間の分類は、このように直和に分解しない、いわゆる indecomposable なものを分類すれば十分である。

木村達雄その他、筑波スクールを言われる人たちによって、作用する代数群の半単純部分が単純代数群や２単純代数群の場合、そして特異軌道が有限個しか存在しない簡約可能概均質ベクトル空間の分類が完成した。

一般に任意の群 G の任意の m 次表現ρと、m 以上の任意の n に対して、G×GL(n)のρと標準表現Λ_1 のテンソル表現は常に概均質ベクトル空間になり、自明な概均質ベクトル空間とよばれる。既約の場合は、自明な概均質ベクトル空間のクラスとして一括できるが、既約でない場合に、各既約成分が自明な概均質ベクトル空間と裏返し同値になる場合の分類は、群や表現の可能性が多すぎて、分類は極めて難しく複雑になる。群が２単純の場合だけが、すべて完成されているが、どれが正則で相対不変式の個数がいくつかは、全く未決定である。

既約成分が２個の場合の分類は笠井伸一氏によって精力的に進められたが、この場合も両方の既約成分が共に自明な概均質ベクトル空間に裏返し同値の場合は未解決で、さらに３単純代数群という条件を付加した場合に黒澤恵光氏によって完成された。
しかし３単純一般の場合は未解決である。

すべての概均質ベクトル空間を分類しようとすると、余りに多いため、今のところ制御不能で、色々試みたがうまくいかなかった。しかも殆どの場合は相対不変式すら存在しなくて、いわゆる概均質ベクトル空間の種々の理論が殆ど適用できないものが沢山現れてくる。

そこで方針を変えて、解析的な概均質ゼータ関数を構成することが出来る良い性質を持った概均質ベクトル空間の分類に的をしぼることにした。

２．研究の目的

概均質ベクトル空間の中で、関数等式を満たす解析的な概均質ベクトル空間が構成されている場合、すなわち相対不変式が唯一つの reductive 正則概均質ベクトル空間を分類すること、更に、その相対不変式の形を具体的に決定すること、が本研究の目的である。これが完成すると、個々の場合のフーリエ変換の実際の計算、それに基づく概均質ゼータ関数の具体的な関数等式の決定、など次の研究を進める上での先行研究になる。

３．研究の方法

最初は、どうやって良いかの見当もつかなかったので、まず例を集めることから始めた。それは、既に分類された何種類かの概均質ベクトル空間の中から、相対不変式が唯一つの概均質ベクトル空間を選び出すことである。

それは単純概均質ベクトル空間とＩ型の２単純概均質ベクトル空間の表から選び出すことは、すぐに出来たが、既約成分がすべて自明な概均質ベクトル空間と裏返し同値な場合であるⅡ型の２単純概均質ベクトル空間の表から選び出すことが極めて難しく行き詰ってしまった。なぜなら、すべてのその場合が分類されているとはいえ、正則か否か、相対不変式の個数はいくつか、に関しては全く知られていなかったからである。正則かどうかは一般的等方部分群のリー環が reductive かどうかを調べればよいが、その計算が場合によっては極めて難しいのである。なお、それが分かれば、相対不変式の個数はわかる。

しかし概均質ベクトル空間の全体が殆ど分類されていない現状では、たとえこれらが出来たとしても、例を与えたに過ぎず、分類からはほど遠い。

幸い研究の３年目で科研費による出張でドイツのマンハイム大学の名誉教授のヘルベルト・ポップ教授と数学の議論をしているうちにあるアイデアを得た。

作用する群が簡約可能で相対不変式が唯一つの正則概均質ベクトル空間を、簡単のため、典型的とよぶことにする。

典型的な概均質ベクトル空間の裏返し変換は、再び典型的な概均質ベクトル空間であるから、redeuced な場合だけを決定すれば良いことがわかる。

　非既約な典型的概均質ベクトル空間の既約成分は、相対不変式を持たない非正則既約概均質ベクトル空間であるが、それは佐藤・木村により完全に分類されていて
５つのタイプに分かれる。５番目が非正則な自明な概均質ベクトル空間と裏返し同値なもののクラスである。
既約成分が２個以上の典型的概均質ベクトル空間に対して、その二つの既約成分の組み合わせの可能性を考える。この二つが概均質ベクトル空間のいわゆる直和にはならず、両方の空間に作用する代数群の単純成分が存在することは容易にわかる。それが殆どの場合に SL(n)であることもわかる。難しいのは、それぞれ裏返し変換が無限にあるので、reduced の形が５つしかなくても、見かけ上、無限の組み合わせを考えなければいけなくなることである。幸い、一般等方部分群は裏返し変換をしても、同型であることが知られており、これは群と空間の次元の差が裏返し変換で不変なことを意味する。これを使うと、二つの既約成分の和が概均質ベクトル空間であるためには、SL(n)の n が、reduced 概均質ベクトル空間の情報で抑えられてしまうことが証明され、組み合わせの可能性が、有限個（それも大きくない数）で抑えられることがわかった。
その結果、一つの既約成分が reduced でなければ、他のすべての成分は reduced である、ということになり、これにより分類を完成する手段が得られた。

４．研究成果

簡約可能代数群による非既約な正則概均質ベクトル空間で相対不変式が唯一つにものの分類で、少なくとも一つの既約成分が自明な概均質ベクトル空間と裏返し同値ではない、という条件のもとで分類が完成した。
　しかし研究の過程で、それ以外のいくつかの場合にも成果が得られている。
例えば、$(G\times GL(k),\ \rho\otimes\Lambda_1+\sigma\otimes\Lambda_1^*,\ V(m)\otimes V(k)+V(n)\otimes V(k))$が概均質ベクトル空間である必要十分条件は、$(G,\ \rho\otimes\sigma, V(m)\otimes V(n))$が概均質ベクトル空間であることであり、これは、佐藤・森変換とよばれ、これで無限に新しい概均質ベクトル空間を構成することが出来る。ただし $m<k$ かつ $n<k$ という条件がいる。本研究では、この形の正則概均質ベクトル空間で相対不変式が唯一のものも、完全に決定することが出来て、今まで知られていなかった新しい概均質ベクトル空間が得られた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　　０件）

〔学会発表〕（計　　１件）

「典型的概均質ベクトル空間の分類について」

　概均質ベクトル空間研究会　2018 年 8 月　於　秋田大学

〔図書〕（計　　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　０件）

名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：なし

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：大内将也
ローマ字氏名：Masaya OUCHI

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。