様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８０６

研究課題名（和文）平面代数曲線のゴナリティについて

研究課題名（英文）On the gonality of plane algebraic curves

研究代表者
酒井　文雄（SAKAI, Fumio）

埼玉大学・理工学研究科・名誉教授

研究者番号：４００３６５９６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：射影直線のd重巡回被覆曲線Cを考え，被覆を定義するCの自己同型写像σの固定点の個数をbとする．このとき，固定点のワイエルシュトラス重複度を問題にする．数dとb（ただし，bは5以上）を固定したときの固定点のワイエルシュトラス重複度の下限がPerez Del Pozo氏により得られている（2006年）．共同研究協力者の王楠氏，川崎真澄氏との共同研究により，Perez Del Pozo氏の下限を実現する曲線Cを完全に分類した．なお，b=2,3,4の場合には吉田克明氏の先行結果（1993年）がある．さらに，b=1の場合にも部分的結果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
代数曲線は数学の一つの源であり，古典的な研究テーマであるが，現代においても活発に研究されている．代数曲線上の点が与えられたとき，その点で極を持つ有理関数の挙動が特殊な点が有限個あり，ワイエルシュトラス点と呼ばれている．ワイエルシュトラス重複度はその特殊さを表す数である．

　ワイエルシュトラス点および高次ワイエルシュトラス点の研究により代数曲線の様々なことが判明する．今回の研究で，射影直線の巡回被覆曲線におけるワイエルシュトラス重複度の計算アルゴリズムを得たので，いろいろな方面で構造研究が進むと思われる．

研究成果の概要（英文）：Let C be a smooth projective curve which is a d-fold cyclic covering of the projective line, given by an automorphism σ. Let b be the number of the fixed points of σ. We consider the Weierstrass weights of the fixed points. Fixing d and b, if b is greater than or equal to 5, the lower bound of the Weierstrass weights was obtained by Perez Del Pozo in 2006. In our joint paper with Wangyu,N., and Kawasaki,M, we completely classified those curves C attaining the lower bound. We remark that for b=2,3,4, such classification was obtained by K.Yoshida in 1993. We also considered the case in which b=1 and obtained some results.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何　平面代数曲線　ワイエルシュトラス点　ワイエルシュトラス重複度　ゴナリティ　巡回被覆曲線

１．研究開始当初の背景

1980 年代の中頃から，平面代曲線の研究を開始した．まず，有理的で特異点として尖点のみをもつ平面曲線（有理尖点曲線）を考察した．有理尖点曲線について，曲線の次数は特異点の最大重複度の 3 倍未満であるという予想を肯定的に解決した．2002 年に，$(d, d-2)$ 型の平面有理尖点曲線を分類した．次数が d で特異点の最大重複度が $d-2$ の曲線を $(d, d-2)$ 型と呼んでいる．2004 年には一般の特異点を持つ $(d, d-2)$ 型平面有理曲線を分類し，2010 年には，この結果をさらに正種数の場合に拡張して，すべての $(d, d-2)$ 型の平面曲線を分類した（Saleem,M. 氏，戸野恵太氏との共同研究）.

2004 年に特異点を持つ平面曲線の不変量ゴナリティを研究し，ゴナリティが次数と特異点の最大重複度との差に一致するための判定法をいくつか証明した（大河内正仁氏との共同研究）．2012 年の論文でこれらの結果をさらに改良した．また，2013 年に研究協力者の王楠氏との共同研究により，射影直線の巡回被覆曲線でゴナリティーが 2 になる曲線を分類した．

2008 年頃から，いくつかの平面曲線族のワイエルシュトラス点や高次ワイエルシュトラス点の計算とモジュライとの関連を調べている．

2．研究の目的

代数曲線の有理関数体の 1 変数有理関数体からの最小拡大次数として定義されるゴナリティは基本的な不変量である．一般に，与えられた平面曲線のゴナリティを完全に決定することは困難であるが，残された重要な研究課題である．また，ある特定のゴナリティを有する平面代数曲線を構成して研究することも重要である．

定義方程式 $y^d = f(x)$ で定義される射影直線の d 次巡回被覆曲線は大変興味深い曲線で，近年種々の研究がなされている．この場合でも，ゴナリティを決定することは容易ではない．研究協力者の王楠氏との共同研究や王楠氏の研究で，ゴナリティが 3 以下の場合を決定したので，次の目標は，ゴナリティが 4 や 5 になる場合の研究である．

射影直線の素数次巡回被覆曲線族のモジュライ空間の研究を進めたい．一般に，このような場合のモジュライ空間はパラメータ空間を有限群で割った商空間として記述できるが，曲線族によって，個別の研究が必要である．

３．研究の方法

射影直線の巡回被覆曲線の不変量を計算するアルゴリズムの研究を進める．ワイエルシュトラス重複度やゴナリティなどである．(1) 曲線の双有理同型による定義方程式の変換を詳しく調べ，曲線を定義方程式の型によって記述する．(2) 型によって不変量を記述し，数値計算なども活用して，曲線の研究を進める．(3) 巡回被覆を与える自己同型の正則微分形式の空間への作用を研究する．Eichler の跡公式などを応用する．(4) 問題を型の数論的問題に帰着し，White の定理や Cholwa の定理などの格子数論との関連を研究する．

４．研究成果

射影直線の d 次巡回被覆曲線 C におけるワイエルシュトラス点の研究を進めた（王楠氏，川崎真澄氏との共同研究）．曲線 C の巡回被覆を定義する自己同型写像を σ とする．このとき，σ の固定点が研究対象である．固定点の個数を b と定めておく．次のような先行研究がある．(a) J.Lewittes (1964)，引用文献 ①： $b \geq 5$ であれば，すべての固定点はワイエルシュトラス点である．(b) K.Yoshida (1993)，引用文献 ②： $b = 2, 3, 4$ の場合に，C の構造を決定した．(c) Perez Del Pozo (2006)，引用文献 ③：d と $b \geq 5$ を固定したとき，固定点のワイエルシュトラス重複度の下限を求めた．

(1) 射影直線の d 次巡回被覆曲線 C には次の形の定義方程式

$$y^d = (x-\lambda_1)^{a_1}\cdots(x-\lambda_n)^{a_n}$$

が存在し，条件：$\mathrm{GCD}(d, a_1, \ldots, a_n) = 1$ が満たされる．そこで，$(d; a_1, \ldots, a_n)$ を C の型ということにする．いま，$e_k = \mathrm{GCD}(d, a_k)$ とおく．このとき，C の種数 g は種数公式 $2g-2 = d(n-2)-(e_1+\cdots+e_n)$ で与えられる．今回の研究の対象は $g \geq 2$ の場合である．

(2) 固定点 P のワイエルシュトラス重複度 $w(P)$ を曲線の型を用いて表す計算公式を証明した．有理数 x の分数部分を記号 $\{x\}$ で表す．

定理１：射影直線の d 次巡回被覆曲線 C の型を $(d, a_1, \ldots, a_n)$ とし，$e_k = 1$ であれば，λ_k 上には唯一つの分岐点 P_k がある．このとき，点 P_k のワイエルシュトラス重複度は次の式で表される．

$$w(P_k) = g(d-g-1)/2 + (d/2)\sum_{i=1}^{d-1} l_i^2 - d\sum_{i=1}^{d-1}(l_i\{ia_k/d\}) \qquad (l_i = -1 + \sum_{k=1}^{n}\{ia_k/d\})$$

(3) 下記の主結果を証明した．

定理２．射影直線の d 次巡回被覆曲線 C の固定点でワイエルシュトラス重複度が Perez Del Pozo 氏の下限を実現するものがあるとする（$b \geq 5$）．このとき，すべての分岐点は固定点であり，$b = n$ が成立する．さらに，曲線 C の型について，下記のことが成立する．

(a) n が偶数の場合．$r = (n-2)/2$ とし，番号を付け替えると，$a_{2j-1} + a_{2j} = d \quad (j = 1, \ldots, r+1)$ が成立する．

(b) n が奇数の場合（このとき，d も奇数）．(b1) $d = 3$ のとき，$r = (n-3)/2$ とすると，$\{a_k\}$ の内，$r+1$ 個は 1 で，r 個は 2 である．(b2) $d \geq 5$ のとき，$r = (n-1)/2$ とし，番号を付け替えると，$a_{2j-1} + a_{2j} = d \quad (j = 1, \ldots, r-1)$，$a_{2r-1} = a_{2r}$，$\quad a_{2r-1} + a_{2r} + a_{2r+1} = d$ が成立する．

(4) 補足．$b = 1$ の場合，$w(P) = 1, 2, 3$ となる固定点 P がある場合に曲線の構造を決定した．

＜引用文献＞

① J.Lewittes, Automorphisms of compact Riemann surfaces, Amer. J. Math. **85**, 1963, 734–752

② K.Yoshida, Automorphisms with fixed points and Weierstrass points of compact Riemann surfaces, Tsukuba J. Math. **17**, 1993, 221–249

③ A.L.Perez Del Pozo, On the weights of the fixed points of an automorphism of a compact Riemann ssurface, Arch. Math. **86**, 2006, 50–55

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Nan Wangyu, Masumi Kawasaki and Fumio Sakai, On Perez Del Pozo's lower bound of Weierstrass weight, Kodai Math. J., **41**, 査読有, 2018, 332–347

② Nan Wangyu, Masumi Kawasaki and Fumio Sakai, On Perez Del Pozo's lower bound of Weierstrass weight, 第 14 回代数曲線シンポジウム報告集, 査読無, 2017, 129–140

③ Fumio Sakai, Invariants of cyclic coverings of the projective line, 代数学ミニシンポジウム 2016 in 倉敷-代数幾何及び学生の自由研究に関する会議-報告集, 査読無, 2016, 34–62, http://www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/AlgeGeo/algebraic_geometry_2016.pdf

〔学会発表〕（計 3 件）

① 酒井文雄, Invariants of cyclic coverings of the projective line, 代数学ミニシンポジウム 2016 in 倉敷, 2016 年 8 月 28 日, 倉敷市民会館（岡山県倉敷市）
② 酒井文雄, Weierstrass Weight, Theorems of Chowla and White, Terminal Lemma, 第 13 回アフィン代数幾何研究集会, 2016 年 3 月 6 日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス（大阪府大阪市）
③ 酒井文雄, White の定理，Chowla の定理，巡回商特異点，射影直線の巡回被覆, 東海大学談話会, 2016 年 2 月 15 日, 東海大学湘南キャンパス（神奈川県平塚市）

〔図書〕（計 1 件）

① 酒井文雄 他, 朝倉書店, 朝倉数学辞典, 2016, 760

〔その他〕ホームページ等
http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/FumioSakai.html

６．研究組織

(2) 研究協力者
研究協力者氏名：川崎 真澄
ローマ字氏名：(KAWASAKI Masumi)
所属研究機関名：海城高等学校
職名：教諭

研究協力者氏名：王 楠
ローマ字氏名：(WANGYU Nan)
所属研究機関名：Shenyang Normal University
部局名：College of Mathematics and Systematic Science
職名：講師