様 式 C－１９、F－１９－１、Z－１９ （共通）

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 元 年 ６ 月 ５ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８０８

研究課題名（和文）Macdonald多項式の分岐規則と幾何学

研究課題名（英文）brunching rules for the Macdonald polynomials and geometry

研究代表者
白石 潤一（Shiraishi, Junichi）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：２０２７２５３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：星野歩氏との共同研究で、一列型の分割に対するKoornwinder多項式の（遷移行列ないし分岐規則についての）明示的公式を得た。Bressoudないしkrattenthalerのmatrix inversionの理論を適用することでその遷移行列の組合わせ的構造の基礎的構造を究明した。その応用として、一列型の分割に対するC型のMacdonald多項式のmonomial多項式に関する遷移行列が変形されたCatalan三角数の漸化式を満足すること、および、Kostka多項式がq-Catalan数で書けることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
Koornwinder多項式は、多変数の直行多項式系ないし超幾何級数に関する組合わせ的公式の分野で最も一般なクラスを与える。その明示的公式、組合わせ的構造については、まだ理解出来ていないことが多く残されている。困難の原因は、幾何学的表現論の見地からは、問題に付随する多様体の特異点の解消の方法が知られていないことに起因する。将来の課題である一般論への足がかりとして、分割が一行型の場合に限定して一般の分割で起きうる困難を極力減らすことで、Koornwinder多項式に付随する超幾何級数に関する組合わせ的公式の本質を究明し、それをmatrix inversionの理論に集約・整理した。

研究成果の概要（英文）：In the joint work with A. Hoshino, we studied the explicit formula (for the transition matrices or brunching rules) for the Koornwinder polynomials associated with one column diagrams. It was shown that the matrix inversion formulas of Bressoud or Krattenthaler play the central role in these combinatorial objects, i.e. the transition matrices. As applications, we proved that the entries of the transition matrix from the monomial polynomials to the Macdonald polynomials of type C satisfy an analogue of the recurrence relations for the Catalan triangle numbers, and also proved that the Kostka polynomials are given by the q-Catalan numbers.

研究分野：量子可積分系

キーワード：Macdonald多項式 Koornwinder多項式 matrix inversion Catalan数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

研究開始当初，Macdonald 多項式，Koornwinder 多項式の研究に関して，様々な基底の間の遷移行列が多変数の超幾何級数の形をとり，従って，組合わせ的構造を伴って現れることが(色々な具体例や本研究者の得た予想などから)知られるようになっていた．

A 型の Macdonald 多項式の場合は, Macdonald 自身による様々な組合わせ的公式が知られていた．本研究者と野海氏による（多項式ではない）漸近自由的固有関数と呼ばれる無限級数の研究は，その組合わせ的構造と核関数関係式の間の深い関係を基に構成されたものである．他方，その A 型の漸近自由的固有関数は, Laumon 空間上の de Rham 複体の Euler 指標と一致することも示された(Bravermann, Finkelberg, 白石)．その代数幾何学的表現論的の立場からは, torus 作用の固定点の分類, Atiyah-Bott-Lefshetz の公式などを通じて組合わせ的構造が自然に現れる．

本研究者は B, C, D 型の Macdonald 多項式の場合に対して, A 型の場合のような漸近自由的固有関数の構成を試みたが，ランクが高くなると，必然的にある非常に難しい問題に直面することを経験していた．それは，Macdonald 多項式をひとつ低いランクのそれで分解するときに付随する分岐係数が「重複度」を持つときには，それまでの経験では処理しきれないほど複雑で長大な式が現れることに起因している．しかしながら，その大きな式は Feigin-Odesskii 代数に現れるような幾つかの性質で一意的に決定されているらしいことを実験的に突き止めた．この認識を契機に本研究者は，Macdonald 多項式，Koornwinder 多項式に関する分岐規則の研究を，組合わせ的側面，表現論的視点，および，幾何学的理解など多方面からの視点を持って推進することとした．

Macdonald ないし Koornwinder 作用素に付随する核関数関係式（小森・野海・白石）は，Macdonald ないし Koornwinder 多項式に関する再生核を与える．A 型の Macdonald 多項式に関しては，核関数関係式を用いて定められるある種の多重積分を基に多項式の明示的公式を構成することができる．B, C, D 型の Macdonald 多項式の場合には，まだそのような多重積分の一般論は得られていない．ただし，分割が一行型の場合，核関数関係式を応用した積分がある種の（A 型の場合に比べてかなり複雑な）明示的公式を与える．

B, C, D 型の Macdonald 多項式に関する「Lassalle の予想」は，本研究者に大きな動機を与え続けて来た．彼の公式は「一行型の分割を持つ B, C, D 型の Macdonald 多項式たちの間の(即ち異なる Weyl 群型の間の）遷移行列に一定の組合わせ的構造を見いだすことができる」ことを主張する．これは，一見非常に奇妙なことのように思われるが，本研究者はこれを最大限一般化し, Lassale の予想を「異なるパラメータを持つ Koornwinder 多項式の間の遷移行列の持つべき組合わせ的構造」の特殊な場合と捉えることが自然であると考えた．それを定式化するためには，まず Askey-Wilson 多項式(ランク 1 の Koornwinder 多項式)の 4 重和による級数表示の構成（星野・野海・白石）が必要であった．この 4 重級数の構成は高度に複雑である．それには，非常に多くの超幾何級数に関する変換・和公式が用いられる．本研究者は，素朴に期待して，このような非常に複雑で技術的な扱いが，将来 B, C, D 型の Macdonald 多項式の幾何学的表現論のより良い理解に直結するのではないか考える．

核関数関係式は，変形ビラソロ代数や変形 W 代数の遮蔽作用素の演算子積公式から導くこともできる．換言すれば，変形ビラソロ代数や変形 W 代数の Fock 表現の性質を深く反映している．A 型の Macdonald 多項式についてそれは，「Fock 表現における特異ベクトルは Macdonald 多項式である」という興味深い現象に端的に表れている．他方, B, C, D 型の変形 W 代数の場合, Fock 表現における特異ベクトルの同様な記述は全く得られていない（そのような類似物があるのかないのかも不明）．これは面白そうな問題ではあるが, 問題解決の糸口さえ見つかっていない．実際，小森・野海・白石の核関数をなにか遮蔽作用素の演算子積公式と捉えるには至っていない．この状況を念頭に置くことは必要であろうが，本研究者は，Koornwinder 作用素の核関数関係式の理解，Koornwinder 多項式の分岐係数の（組合わせ的，ないし, Feigin-Odesskii 代数的）理解を当面は優先すべきだと判断した．

Macdonald の q 差分作用素の(適当なスケール変換を施した後)t=0 での極限から，量子 q 戸田作用素が得られる．q 戸田作用素の固有関数は t=0 の極限を取るために Macdonald 多項式よりもその組合わせ的な扱いが格段に容易になっている可能性がある．ただし，それに付随する微分方程式の極限の立場から見ると，合流型の極限を考えているゆえに，解析的な扱いが難しくなっているような側面もある．仮に B, C, D 型の q 戸田作用素の固有関数の構成ができるならば，Macdonald 多項式の理解にも繋がるであろうし，幾何学的表現論への糸口を掴むことができるかもしれない．ともかく，量子 q 戸田作用素の固有関数を深く理解することはそれ自身が非常に重要な問題であり，幾何学的表現論ないし量子コホモロジー論，超弦理論など関連する分野に大きな影響を与えるであろう．

量子 q 戸田の極限で核関数関係式の扱うことは若干の注意を要する．t=0 の極限を考察するためには，適宜擬定数を乗じてから極限を取る必要がある．量子 q 戸田の固有関数の積分表示は概ねこのような方法で Macdonald 作用素の固有関数の積分表示とつながっている．しかし，本研究者はここにもまだ組み尽くされていない現象が残されていることを実験的にみいだした．戸田の固有関数は場合によれば Macdonald 作用素のそれとは違う組合わせ的理由で簡単な(つまり因数分解した)形を持ちうる．A2 型の場合には，Bump-Stade による Whittaker 関数の研究にそのような例を見ることができる．このギャップは非常に印象的であり，我々により

一層の考察を促すものであると考えられる．

Macdonald の q 差分作用素は有理関数を係数に持つ差分作用素である．Ruijsenaars 作用素は，楕円テータ関数の有理式を係数に持つ差分作用素であり，有理極限で Macdonald 作用素に退化する．Macdonald 作用素の固有関数の構造が，組合わせ的に理解されるのに比較して，Ruijsenaars 作用素の対角化の問題は遥かに複雑である．Macdonald 多項式を初項とするような摂動展開に，組合わせ的な構造を見出すことは困難であるが重要な問題であった．

本研究者は，「Affine の対称性を持つ遮蔽作用素に付随した頂点作用素を適当に定めれば，その行列要素が Ruijsenaars 作用素の固有関数を組合わせ的に記述するであろう」と期待していた．その発見法に関する説明は簡単ではないが，鍵となる事柄をいくつか述べる．まず，位相的頂点の理論（粟田・Feigin・白石）を用いて適当なサイズの蜂の巣状の格子を考え，適当なスペクトル変数を付与すれば，Macdonald 作用素の漸近自由な固有関数を得る．これを基に縦方向の表現空間に関して行列要素の跡を取ることにすれば，Affin ルート系に付随した Macdonald 関数の拡張物を得ることができる．ただし，残念ながらこの方法では Affin リー環の level に相当するパラメータがある特殊な値となる場合しか得られない．その困難を解消するには，位相的頂点による構成を放棄して，Affine の対称性を持つ遮蔽作用素に付随した頂点作用素を適当に（何もないところから）構成しなければならない．もしくは affine Laumon 空間(Feigin, Finkelberg, Negut, Rybnikov)の上で幾何学的表現論を展開するとその Euler 指標がそれと同じ土俵を与えるものと考えられる．

２．研究の目的

上述したように，本研究者は Koornwinder 多項式，Macdonald 多項式の明示的公式ないし，分岐規則の組合わせ的，ないし幾何学的理解を重要な問題と位置付けた．さらに，q 差分戸田系の場合に（その特有の構造を利用して）Macdonald 多項式では現在まだ難しい点を回避して，より一般の状況での明示公式を得ることを試みる．また，楕円系，ないし， affine の対称性を持った（非定常）系（Ruijsenaars 系，ないし，affine 戸田系）の固有関数の理解も目指す．

本研究の目的を箇条書きする。

(a) Koornwinder 多項式，ないし，B, C, D 型の Macdonald 多項式の明示的公式の導出．ランクが小さい場合には分割が一般の場合の一般公式の予想を得ること（できれば証明すること）．ランクが一般の場合には分割が特殊なもの（一列型ないし一行型）に限定して，明示的公式の組合わせ的構造を究明する．その結果，Lassalle の予想を証明し，その現象の背後にある構造を明らかにすること．

(b) B, C, D 型の q 戸田系の固有関数の明示的公式の予想を得る（できれば証明する）こと．核関数関係式に基づく予想式の整理と理解を目指すこと．幾何学的表現論の視点からの考察を行うこと．

(c) Koornwinder 多項式，ないし，B, C, D 型の Macdonald 多項式の分岐係数の理解を進めること．Feigin-Odesskii 代数からの理解，ないし，組合わせ的構造についての研究．Koornwinder 作用素の Fock 表示を求めること．

(d) Ruijsenaars 作用素，（非定常）楕円 Calogero-Sutherland 作用素，ないし，（非定常） affine q 差分戸田系の固有関数の組合わせ的記述．Affine の対称性を持つ遮蔽作用素の構成と行列要素の計算．affine Laumon 空間の上で幾何学的表現論との比較．

３．研究の方法

上述の項目(a)，(b)，(c)，(d)に従い，研究の方法を要約する．

(a)，及び(c) この項目に関する事項は部分的に星野氏との共同研究で行う．Askey-Wilson 多項式の 4 重和公式と Koornwinder 作用素の核関数を用いて，分割が一列の場合の Koornwinder 多項式の明示的公式を導出する．分割が一列の場合の多項式の空間は，長さがランクを超えない一列の分割に対する有限個の monomial 多項式が基底となり，種々の遷移行列の具体的計算が比較的容易となることに着目し，遷移行列性質を徹底的に調べる．

さらに C 型の Macdonald 多項式の場合に限定して考える．C 型の Macdonald 多項式の monomial 基底に関する遷移行列の行列要素が Catalan 三角数に対する 3 項間漸化式の 3 パラメータ変形を満足することを証明する．

その背後にある組合わせ的構造が，Bressoud，及び，Krattenthaler の matrix inversion で与えられることを示す．さらに，それら二つの matrix inversion が Askey-Wilson 多項式の 4 重和公式のうち C 型の Macdonald 多項式への退化で残る 2 重の部分を，ちょうどそれぞれ記述していることを明らかにする．

q=0 の極限（Hall-Littlewood 多項式）での明示公式を導く．C 型の Hall-Littlewood 多項式と C 型の Schur 多項式の間の遷移行列を計算し，Kostka 多項式の明示公式を導出する．C 型の Kostka 多項式が，Catalan 数の t 類似で与えられることを証明する．

同様の考察を分割が一列の場合の Koornwinder 多項式と monomial 基底に関する遷移行列の場合に行い，理論を拡張する．その際，Askey-Wilson 多項式の 4 重和公式の再吟味が必要となる．換言すると，「Askey-Wilson 多項式の（改善された）4 重和公式は Bressoud，及び，Krattenthaler の matrix inversion の４重の積み重ねで得られる」という定理を証明する．実は，これが，上述した Lassalle の予想の背後にある組合わせ的構造の正体であることを示す．

(b) 現在のところ，残念ながら，C, D 型の q 戸田系の固有関数の構造はその複雑さのために明らかにすることがまだできていない．ところが，B 型の q 戸田系の固有関数の分岐規則を調べていて，一般公式の予想を得た．核関数関係式の観点からの整理，証明の可能性などについて考察する．

(c) 上述以外の観点（Feigin-Odesskii 代数からの理解など）からの理解を助けるために，数式処理プログラムを用いて系統的に実験的計算を積み重ねる．理論的側面からは，B, C, D, 型の Macdonald 作用素の成す可換族の基礎的理論の建設を目指す．つまり，高次の作用素の明示的公式を目指す．双スペクトル性の観点から，多項式の Pieri 公式と高次の作用素の成す代数の理解は同じものであるはずである．そこで，高次の作用素の扱いには自然に Feigin-Odesskii 代数が付随することを根拠に，高次の作用素ないし Macdonald 多項式の明示的公式を研究する．

(d) Affine の対称性を持つ遮蔽作用素に付随する頂点作用素の構成を行い，その行列要素を計算する．その行列要素がある種の Nekrasov 分配関数の形に書けることを示す．その公式を用いて，Macdonald 多項式の楕円，ないし，affine 類似である 「非定常 Ruijsenaars 関数」を定義する．非定常 Ruijsenaars 関数が affine Laumon 空間の de Rham 複体上の Euler 指標であることを証明する． q=t の極限で，非定常 Ruijsenaars 関数が affine Lie 環の規約指標に退化することを証明する．微分極限(q=t=1)で，非定常 Ruijsenaars 関数が非定常楕円 Calogero-Sutherland の固有関数を与えるという予想を得る．適当に「非定常 q 差分 affine 戸田方程式」を導入する．q 差分 affine 戸田の極限で，非定常 Ruijsenaars 関数がこの非定常 q 差分 affine 戸田方程式を満たすことを予想する．

残念ながら，現在のところ，この非定常 Ruijsenaars 関数がみたすべき「非定常 Ruijsenaars 方程式」はわかっていない．それがどのようなものであるかを研究する．

４．研究成果

本研究で得られた結果について，上述の項目に従い整理する．

(a),(c) 星野氏との共同研究で，分割が一列の場合の Koornwinder 多項式の明示的公式が得られた．その特殊ケースとして C 型の Macdonald 多項式を扱い，monomial 多項式に関する展開係数の満たす３項間漸化式を導いた．C 型の Kostka 多項式が，Catalan 数の t 類似で与えられることを証明した．

(b) B 型の q 戸田系の漸近的自由な固有関数の予想を得た．Koornwinder 作用素の Fock 表示を求めた．

(d) Affine の対称性を持つ遮蔽作用素に付随する頂点作用素に基づき，非定常 Ruijsenaars 関数を導入した．非定常 Ruijsenaars 関数に関して，双スペクトル双対性につての予想，affine Laumon 空間の Euler 指標との同定，affine Lie 環の規約指標に退化に関する定理，非定常楕円 Calogero-Sutherlan 方程式に関する予想，非定常 q 差分 affine 戸田方程式に関する予想，などを得た．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　３　件）

① A. Hoshino and J. Shiraishi, Macdonald polynomials of type C_n with one-column diagrams and deformed Catalan numbers, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 14 (2018), Paper No. 101, 33 pp. 査読あり

② Boris Feigin, Ayumu Hoshino, Masatoshi Noumi, Jun Shibahara, Jun'ichi Shiraishi, Tableau Formulas for One-Row Macdonald Polynomials of Types Cn and Dn, SIGMA, 11 (2015), 100, 21 pp. 査読あり

③ Ayumu Hoshino, Masatoshi Noumi, Jun'ichi Shiraishi, Some Transformation Formulas Associated with Askey-Wilson Polynomials and Lassalle's Formulas for Macdonald-Koornwinder Polynomials, Moscow Mathematical Journal, Volume 15, Issue 2, April-June (2015) pp. 293-318. 査読あり

〔学会発表〕（計　５　件）

① 星野歩，白石潤一，Kostka polynomials with one column diagrams of type Bn, Cn and Dn, 日本数学会年会，2019 年 3 月 20 日，東京工業大学

② 星野歩，白石潤一，Matrix inversion for Koornwinder polynomials with one-column diagram 日本数学会秋季総合分科会，2018 年 9 月 24 日，岡山大学

③ 星野歩，白石潤一，一列型 C,$型 Macdonald 多項式の明示公式,日本数学会年会，2018 年 3 月 20 日，東京大学

④ J. Shiraishi, Some conjectures about duality identities associated with affine root systems and screened vertex operators with toroidal structure,``Exact methods in low dimensional statistical physics'' (from 25 July to 4 August, 2017, Institut d'Etudes

Scientifiques de Cargese).
⑤ 星野歩，野海正俊，白石潤一，一行型C_n型Macdonald多項式のタブロー和表示,日本数学会年会，2015年3月23日，明治大学

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：