

令和元年6月22日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04813

研究課題名(和文) 代数多様体のガロワ埋め込みの総合的研究

研究課題名(英文) Comprehensive research of Galois embedding of algebraic variety

研究代表者

吉原 久夫 (Yoshihara, Hisao)

新潟大学・自然科学系・フェロー

研究者番号：60114807

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体の幾何学的性質と代数学的性質を比較研究するため、ガロワ埋め込みの研究をいくつかの多様体に対して行った。すなわち超楕円曲面に対してはガロワ埋め込みが存在しないこと、射影空間についてはどのような埋め込みでも存在して、特に群が可換の場合には巡回群の直和しかなく被覆の様子も判明した。また、楕円曲線については4次の埋め込みについて詳細に研究した、特に $j$ -不変量が1728のときが最も複雑であり、ガロワ直線の配置まで完全に決定した。その副産物として平面4次曲線では高々2個のガロワ点しか持たないことも判明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数幾多様体の研究に基本的な一つの新しい視点を与えた。従来の研究より具体的で密接に幾何学と代数学の関係をつなぐことに成果があった。すなわち、射影という古典的手法を用いて多様体の射影空間への被覆が対称性が保たれているような場合に、多様体上の関数の体が基本的な純超越拡大からどの程度離れているかを計り、超越拡大の分類の一つの手段ともなった。また、多様体の因子による埋め込みなので、多様体自身とその上の因子の研究方法にも役立った。

研究成果の概要(英文)：In order to study algebraic variety, I have introduced the tool combining algebra and geometry, i.e., Galois embedding. Using the tool I have studied the Galois embedding for some algebraic varieties, i.e., bi-elliptic surfaces, projective spaces and elliptic curves.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ガロワ埋め込み ガロワ点 代数多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究代表者によって平面曲線に対してガロワ点の理論や空間曲線に対してガロワ直線の研究成果があったが、それらを一般化した概念がなかった。これらを総合統一した基本概念を定義して、その適用を目指したのが動機である。一方研究の手段としての射影代数多様体の理論は十分に出来ていた。更に多様体間の被覆についてガロワ被覆の成果も十分完成していた。

2. 研究の目的

代数多様体に対して幾何学的性質と代数的性質の比較研究が基本的な目的である。まず射影平面内の曲線についてガロワ点の理論があり、それによってかなりの成果があった。次に射影空間に埋め込まれているとは限らない代数多様体に対して、非常に豊富な因子による射影埋め込みまで考えて、その埋め込みがガロワ被覆をひきおこす場合を研究し、多様体としての性質とガロワ群の性質などの比較研究を行うことにした。特に、同一の多様体であっても、埋め込む因子によってはガロワ埋め込みにならない場合もあり、この事実に着目して研究することも目指した。

3. 研究の方法

完備一次系により双正則に埋め込まれた場合に、射影を考えてそれが像の射影空間に対してガロワ被覆になる場合を考察した。このときそのガロワ群の元は多様体の自己同型になるが、これがさらに射影変換に拡張されることに注目して群および被覆の関係を研究した。一般的に多様体の自己同型群や被覆群の成果も利用して、ガロワ埋め込みの特殊事情も考慮して考察した。更に楕円曲線やアーベル曲面などのときは、その多様体自身の特殊性も十分活用した。

4. 研究成果

代数多様体の中には埋め込みをどのように選んでも、ガロワ埋め込みにならないものも存在する。そのようなもので典型的な bi-elliptic surface について考察した。まず、一般的に bi-elliptic surface を有限自己同型群で商をとったときの曲面  $X$  を考察した。 $X$  が非特異ならやはり bi-elliptic surface か、または ruled surface で irregularity が 1 の曲面であることを証明して、その系として bi-elliptic surface は射影平面のガロワ被覆にならないことを証明した。したがって、副産物としてガロワ埋め込みを持たないことまで分かった。また、もっとも基本的な射影空間に対しては、代数多様体が射影空間のガロワ被覆になっているとき、それがいつガロワ埋め込みからひき起されたかを明確にして、この場合はいつでもガロワ埋め込みが存在して、しかも群が可換の場合にはガロワ被覆の対応方法まで具体的に記述できた。またこの時の群は巡回群の直和になることも判明した。一方楕円曲線を埋め込んだ時も詳細に研究した。特に、4 次の埋め込みのとき、 $j$  不変量が  $12^3$  でない場合はガロワ直線の配置は四面体の 6 本の辺であり、 $12^3$  の場合はさらに四面体の各頂点に 2 本のガロワ直線が存在して、この 6 本の直線に 8 本の直線を加えたものであることも判明した。副産物として未解決問題であった平面 4 次曲線にはガロワ点は高々 2 個しかないことも解決した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 9 件)

M. Kanazawa, H. Yoshihara, Galois lines for space elliptic curve with  $j=12^3$ , Beitr. Algebra Geom., 査読有, 59 巻, 2018, 431—444  
<https://doi.org/10.1007/s13366-018-0380-z>

K. Tumenbayar, H. Tokunaga, Elliptic surface and contact conics for a 3-nodal quartic, Hokkaido Math. J., 査読有, 47 巻, 2018, 223—244  
<http://hmj2.math.sci.hokudai.ac.jp/>

H. Yoshihara, A note on Galois embedding and its application to  $P^n$ , Nihonkai Math. J., 査読有, 2 巻, 2017, 99—104  
<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/nmj/index.html>

S. Bannai, H. Tokunaga, Geometry of bisections of elliptic surfaces and Zariski N-plets II, Topology Appl., 査読有, 231 巻, 2017, 10—25  
<https://www.journals.elsevier.com/topology-and-its-applications>

H. Yoshihara, Smooth quotient of bi-elliptic surfaces, Beitr. Algebra Geom., 査読有, 57 巻, 2016, 765—769  
10. 1007/s13366-016-0310-x

S. Bannai, H. Tokunaga, Geometry of bisections of elliptic surface and Zariski N-plets for conic arrangements, *Geom. Dedicata*, 査読有, 178 巻, 2015, 219–237  
<https://link.springer.com/journal/10711>

[学会発表](計 18 件)

徳永浩雄, 2次被覆の arithmetic と平面曲線のトポロジー, 代数学シンポジウム, 2018

H. Tokunaga, The topology of plane curves and “ arithmetic ” of  $P^2$ , 15th International Conference Zaragoza and its Applications, 2018

H. Tokunaga, Arithmetic of double covers of  $P^2$ , - the topology of reducible plane curves-, A walk between hyperplane arrangements, 2018

H. Tokunaga, Topology of arrangements of plane curves with low degree and arithmetic of double covers of  $P^2$ , 2018

H. Tokunaga, A remark on certain cubic-line arrangements and elliptic surfaces, On hyperplane arrangements, configuration spaces and related topics, 2018

吉原久夫, Galois lines for space curves, 10th Workshop on Galois point and related topics, 2017

H. Yoshihara, Galois embedding of algebraic variety and some of its applications, Research conference and 2017 convention of the mathematical society of the Philippines, 2017

H. Tokunaga, On the topology of reducible plane curves, Topology of Singularity in Hanoi, 2017

H. Tokunaga, Rational points of elliptic surfaces and cubic-line arrangements, Seminario Geometrie y Topologia, 2017

徳永浩雄, Cubic-line 配置のトポロジーについて, 10<sup>th</sup> Workshop on Galois point and related topics, 2017

徳永浩雄, 楕円曲面の有理点と cubic-line arrangements, 射影多様体の幾何とその周辺, 2017

吉原久夫, Degree six Galois embedding of elliptic curve, 9th Workshop on Galois point and related topics, 2016

H. Tokunaga, Geometry of contact conics, Workshop on Hyperplane Arrangements and Singularity, 2016

H. Tokunaga, A remark on the topology of reducible curves, Seminario de Geometrie y Topologia, 2016

徳永浩雄, A remark on the topology of reducible plane curves, 第13回代数曲面ワークショップ, 2016

H. Tokunaga, On the topology of reducible plane curves, Tsuda College and OIST joint workshop on Calabi-Yau varieties, 2016

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

次のホームページにガロワ埋め込みの定義や、ガロワ埋め込みの元となったガロワ点の理論についての成果や、その関連する成果までが記載されている。さらに約70の未解決問題も掲載されている。

<http://hyoshihara.web.fc2.com/>

## 6. 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：徳永 浩雄

ローマ字氏名：(TOKUNAGA, Hiro-o)

所属研究機関名：首都大学東京

部局名：大学院理工学研究科

職名：教授

研究者番号(8桁)：30211395

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：小島 秀雄

ローマ字氏名：(KOJIMA Hideo)

研究協力者氏名：高橋 剛

ローマ字氏名：(TAKAHASHI Takeshi)

研究協力者氏名：深澤 知

ローマ字氏名：(FUKASAWA Satoru)

研究協力者氏名：星 明考

ローマ字氏名：(HOSHI Akinari)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。