

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：14302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04818

研究課題名(和文)高次元配列に対する群作用とその不変式環

研究課題名(英文)Action of groups to tensors and their ring of invariants

研究代表者

宮崎 充弘(Mitsuhiro, Miyazaki)

京都教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：90219767

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：高次元配列とは、考察の対象となるものを、高次元の直方体状に並べたものである。高次元配列に対する群作用を研究し、その不変式環、とくにそのサグビー基底も含めて考察したところ、その initial algebraがある凸多面体の Ehrhart ringになっている場合が重要である事がわかった。そして、そのようなものの中には、日比環になるものが多くあるので、日比環について研究し、いくつかの成果を得た。また、ドセット日比環というものを定義し、これがある不変式環の initial algebraになっている事も示した。

研究成果の概要(英文)：High dimensional array of data are called tensors in the field of data analysis. We considered in this research group actions to tensors with entries in a commutative ring. We found that in many situations, there are rings of invariants whose initial algebra is the Ehrhart ring of a convex polytope. In particular, there are many cases that such Ehrhart rings are Hibi rings. Thus, we studied Hibi rings and obtained several results. Further, we defined a notion Dosed Hibi ring and showed that the initial algebra of a certain rings of invariants have structures of Dosed Hibi rings.

研究分野：可換環論

キーワード：高次元配列 テンソル 群作用 不変式 サグビー基底 日比環

## 1. 研究開始当初の背景

近年、高次元配列データ、すなわち高次元の直方体状に並んだデータセットは、画像データ処理、WEB 検索、データ探索、脳信号解析などの様々な分野でその重要性が認識され、広く研究されている[KB]。高次元配列データは、そのような分野でテンソルと呼ばれている。d 次元の直方体状に並んだデータセットを、d 次元テンソルと呼ばれる。2 次元のテンソルは、その定義より行列と同義であるが、行列に関する群作用とその作用に関する不変式環は、19 世紀から今日に至るまで、様々な研究者によって広く研究されている ([Wey], [DP], [Ric]等参照)。

Cayley [Cay] は、今日 Cayley の hyperdeterminant として知られる、 $2 \times 2 \times 2$  型の 3 次元テンソルに対して定義される、その成分の多項式を定義した。この多項式は、そのテンソルに対する、特殊線型群の 3 方向からの作用に関して不変なものである。これを Gelfand-Kapranov-Zelvinsky [GKZ] が一般化し、型に関してある一定の条件をみたすテンソルに対して、hyperdeterminant を定義した。Hyperdeterminant は、定義される場合、ただ一つに定まり、各方向からの特殊線型群の作用に関して不変である。

Hyperdeterminant は代数幾何学的な動機に基づいて定義されているので、与えられた型のテンソルに対して、定義されるならば一意に定まるが、特殊線型群の作用に関して不変な、テンソルの成分に関する多項式は、hyperdeterminant だけではなく、不変式論的な観点からみると物足りないものであると言っても言い過ぎではないと思える。そこで、不変式論的な観点から、テンソルに特殊線型群を始めとする、様々な古典群を作用させた場合、どのような不変式環が現れるかという疑問が、本研究の着想に至らしめたものである。

## 2. 研究の目的

高次元配列データ、すなわちテンソルに対する群作用の不変式を研究し、19 世紀から続く極めて深い学問である、不変式論と、近年注目され、応用数学の方面から様々なアプローチにより研究されている、テンソルの理論との関連を探る。これにより、伝統ある学問である不変式論の理論的側面と、テンソルの応用数学的側面に刺激を与え、新たな展開に寄与する。

## 3. 研究の方法

研究計画にそって、3 次元のテンソルに対する、2 方向からの特殊線型群の作用に関する不変式環と、適当な単項式順序に関するその

initial algebra を求め、その可換環論的性質を調べ、高次元配列に対する群作用およびその不変式環と、他の分野、とくに可換環論の他の分野との関連を調べる。

## 4. 研究成果

最も一般的で重要な、不定元を成分とする、3 次元のテンソルに対する 2 方向からの特殊線型群の作用と、それに関する不変式環および、しかるべき単項式順序に関する、その不変式環の initial algebra を調べていくうちに、initial algebra が作る affine semigroup ring が重要であることがわかってきた。とくに、その affine semigroup ring が Noether になるような状況の元で、その affine semigroup ring の正規性や、また、その affine semigroup ring が何らかの凸多面体の Ehrhart ring になっているか、また、その Ehrhart ring はどのような性質を持つかが重要な意味をもつ問である事がわかってきた。

そこで研究の遂行にあたり、その重点を affine semigroup ring の探索に移すことにし、とくに、ある種の不変式環の initial algebra として現れる affine semigroup ring を重点的に調べる事にした。その結果、行列に対する群作用の重要性が再認識された。

高次元配列は、しかるべき規則に従って、行列の形に並べる事ができる。不変式論において、その性質を分析するにあたっては、行列に並べる並べ方を念頭に置いて解析すれば、行列の分析に帰着できる。また、複数方向から高次元配列に群が作用していることは、高次元配列を行列に並べなおす方法に対応する、一般線型群の部分群に対応し、高次元配列に対する群作用は、それに対応する部分群の群作用の研究に帰着できる。

そのような観点から、行列に対する様々な群の作用に関する不変式環を、その initial algebra に重点をおいて調べたところ、そのような initial algebra として、日比環がしばしば現れることがわかった。そのため、研究の重点を、不変式環の initial algebra として現れるような日比環、あるいはもっと一般に、ある凸多面体の Ehrhart ring に移していった。

その結果、様々な不変式環の initial algebra が日比環になっている事を明らかにした。また、日比環から派生して定義される「ドセット日比環」という概念を定義し、これが、ある種の不変式環の initial algebra になっていることも示した。

ドセット日比環は、日比環を一般化して定義される isotonian algebra [BHQHS] で、終集

合の順序集合が3個の元からなる全順序集合であるようなもの、を一般化したものになっている。このような点から、日比環の研究は、日比氏の着想の元となったであろう algebra with straightening law の観点からだけではなく、不変式論からみても重要なものであることを、本研究で明らかにし、下記にあるように、日比環に関する研究成果をいくつか得た。

<引用文献>

[BHHQS] Bigdeli, M., Herzog, J., Hibi, T., Qureshi, A. and Shikama, A.:  
Isotonian Algebras,  
ISOTONIAN ALGEBRAS.  
Nagoya Mathematical Journal, 230,  
(2018) 83-101

[Cay] Cayley, A.:  
On the theory of linear transformations,  
Cambridge Math. J. 4 (1845) 193-209

[DP] DeConcini, C. and Procesi, C.:  
A characteristic-free approach to invariant theory,  
Adv. Math. 21, (1976), 330-354.

[GKZ] Gelfand, I. M., Kapranov, M. M. and Zelvinsky, A. V.:  
Hyperdeterminants,  
Adv. Math. 96, (1992) 226-263

[KB] T.G. Kolda and B.W. Bader:  
Tensor decompositions and applications,  
SIAM Review 51, (2009) 455-500.

[Ric] Richman, D. R.:  
The Fundamental Theorems of Vector Invariants,  
Adv. Math. 73, (1989), 43-78

[Wey] Weyl, H.:  
"The Classical Groups,"  
Princeton University Press (1946)

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

1 Mitsuhiro Miyazaki,  
Almost Gorenstein Hibi rings,  
Journal of Algebra,  
493, 135-149 (2018)  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2017.09.033  
査読有

2 Mitsuhiro Miyazaki,

Doset Hibi rings with an application to invariant theory,  
Communications in Algebra , 46, 335-355  
(2018)  
DOI:10.1080/00927872.2017.1321654  
査読有

3 Mitsuhiro Miyazaki, Toshio Sumi and Toshio Sakata,  
Typical ranks of certain 3-tensors and absolutely full column rank tensors,  
Linear and Multilinear Algebra, 66,  
193-205 (2018)  
DOI:10.1080/03081087.2017.1292994  
査読有

4 Mitsuhiro Miyazaki,  
On the generators of the canonical module of a Hibi ring: a criterion of level property and the degrees of generators,  
Journal of Algebra,  
480, 215-236 (2017)  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2017.02.011  
査読有

5 Mitsuhiro Miyazaki,  
Action of special linear groups to the tensor of indeterminates and classical invariants of binary forms,  
Journal of Algebra,  
473, 430-446 (2017)  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2016.11.021  
査読有

6 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,  
Typical ranks for 3-tensors, nonsingular bilinear maps and determinantal ideals,  
Journal of Algebra,  
471, 409-453 (2017)  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2016.09.028  
査読有

7 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, and Toshio Sakata,  
Determinantal varieties, Bezout's theorem and typical ranks of 3-tensors over the real number field,  
第38回可換環論シンポジウム報告集  
197-203 (2017)  
査読なし

8 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, and Toshio Sakata,  
On the real radical of certain determinantal ideals defined by tensors,  
第37回可換環論シンポジウム報告集  
121-131 (2016)  
査読なし

9 宮崎 充弘,

Tensor of indeterminates への群作用とその不変式環の initial algebra について,  
第 27 回可換環論セミナー報告集  
103-107 (2015)  
査読なし

10 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,  
Typical ranks of  $m \times n \times (m-1)n$  tensors with  $3 \leq m \leq n$  over the real number field,  
Linear and Multilinear Algebra,  
63, 940-955 (2015)  
DOI:10.1080/03081087.2014.910206  
査読有

[学会発表](計 14 件)

1 宮崎 充弘,

On the anticanonical level property of a Hibi ring  
日本数学会年会,  
東京大学駒場キャンパス,  
2018 年 3 月 21 日

2 宮崎 充弘,

Hibi ring の canonical ideal の analytic spread と anti-canonical symbolic spread について,  
Commutative Algebra Day in Kyoto,  
京都教育大学,  
2018 年 3 月 9 日

3 宮崎 充弘,

Hibi ring の canonical ideal に関する Rees algebra と anticanonical cover について,  
第 30 回可換環論セミナー,  
北海道教育大学札幌駅前サテライト,  
2018 年 2 月 1 日

4 Mitsuhiro Miyazaki,

Hibi rings,  
International Workshop on Commutative Algebra,  
タイグエン大学(ベトナム),  
2018 年 1 月 18 日, 19 日(招待講演)

5 Mitsuhiro Miyazaki,

Negative and positive symbolic powers of the canonical ideal of a Hibi ring,  
第 39 回可換環論シンポジウム,  
京都大学数理解析研究所,  
2017 年 11 月 16 日

6 宮崎 充弘,

On the almost Gorenstein property of Hibi rings,  
日本数学会秋季総合分科会,  
山形大学,  
2017 年 9 月 12 日

7 宮崎 充弘,

Actions of special linear groups to tensors of indeterminates and standard property of a certain Ehrhart ring,  
日本数学会年会,  
首都大学東京,  
2017 年 3 月 27 日

8 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,  
Determinantal varieties, Bezout's Theorem and typical ranks of 3-tensors over the real number field,  
第 38 回可換環論シンポジウム,  
IPC 生産性国際交流センター(神奈川県三浦郡葉山町湘南国際村),  
2016 年 11 月 22 日

9 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,  
Typical Ranks of Tensors Over the Real Number Field and Determinantal Ideals,  
The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting,  
The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong,  
2016 年 6 月 27 日

10 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,  
Determinantal varieties and typical ranks of 3-tensors,  
Applications of Algebraic Methods to Statistics,  
Research Institute of Mathematical Science, Kyoto University,  
2016 年 6 月 23 日(招待講演)

11 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,  
On the real radical of certain determinantal ideals and multiple typical ranks of 3-tensors over the real number field,  
International Conference and 8th Japan-Vietnam joint Seminar on Commutative Algebra,  
Ha Long-Vietnam,  
2016 年 3 月 24 日(招待講演)

12 角 俊雄, 宮崎 充弘, 坂田 年男,  
ある種のテンソルにより定義される行列の行列式イデアルの実根基について,  
日本数学会年会,  
筑波大学,  
2016 年 3 月 16 日

13 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and Toshio Sakata,  
On the real radical of certain

determinantal ideals defined by tensors,  
第 37 回可換環論シンポジウム,  
倉敷シーサイドホテル(岡山県倉敷市),  
2015 年 11 月 21 日

14 Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and  
Toshio Sakata,  
About typical ranks of real tensors,  
SIAM Conference on Applied Algebraic  
Geometry,  
National Institute for Mathematical  
Sciences,  
韓国、Daejeon(大田)  
2015 年 8 月 4 日

〔図書〕(計 1 件)

1 Toshio Sakata, Toshio Sumi and  
Mitsuhiro Miyazaki,  
Algebraic and Computational Aspects of  
Real Tensor Ranks,  
Springer, (2016)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

宮崎 充弘(Mitsuhiro Miyazaki)  
京都教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 9 0 2 1 9 7 6 7

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号:

### (4) 研究協力者

( )