2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １３ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８１９
研究課題名（和文）特異点と導来圏

研究課題名（英文）Singularities and derived catetories

研究代表者
石井　亮（Ishii, Akira）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：１０２５２４２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 2 次元商特異点に関する，いわゆる special McKay 対応の大域化について，中村郁氏と共同で研 究し，記述することができた.
(2) ２次元商特異点に対して，その特異点解消のうち，いわゆる最大特異点解消により支配されるものを，G-constellation のモジュライ空間として特徴付けることができた.
(3) 群作用付きダイマー模型について植田一石氏，Alvaro Nolla 氏と研究し，格子多角形の対称性により得られる３次元アフィントーリック多様体の商の非可換クレパントの構成に成功した.

研究成果の学術的意義や社会的意義
(1) これまで知られていたことに対し，より深い洞察を与えることができた.
(2) これまで違う文脈で出てきた二つの概念を結びつけるとともに，導来圏に関する一般的な予想とよく適合する結果である.
(3) 群の作用を考えることで，これまでの結果を一般化するとともに，新しい例の構成に成功した.

研究成果の概要（英文）：(1) We studied some globalisation of the so-called special McKay correspondence for a two-dimensional quotient singularity with Iku Nakamura and obtained a description of it.
(2) For a two-dimensional quotient singularity, we characterized those resolutions dominated by the so-called maximal resolution as the moduli spaces of G-constellations.
(3) We studied dimer models with group actions with Alvaro Nolla and Kazushi Ueda and constructed non-commutative crepant resolutions of the quotient of an affine topic variety by the symmetry of a lattice polygon.

研究分野：代数幾何学

キーワード：McKay対応　モジュライ空間　ダイマー模型

１．研究開始当初の背景

(1) McKay 対応は，2 次元単純特異点に対して観察された現象およびその一般化である．2 次元単純特異点は商特異点であって，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対して $\mathbb{C}^2/G$ の形に書けるものである．この G の非自明既約表現と，特異点解消の既約例外因子とが，Dynkin 図形を通じて対応する，というものがそもそもの McKay 対応である．その後，McKay 対応は商特異点に関して，特異点解消の幾何学と群の表現論を結びつけるものと解釈され，さまざまな一般化が試みられている．特に，3 次元以下の Gorenstein 商特異点に対する McKay 対応が 2 つの導来圏の間の圏同値として Bridgeland-King-Reid により確立されていて，McKay 対応はクレパント解消と非可換環の間の対応であるという見方が可能になった．

(2) 研究開始までに，研究代表者は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 G の場合にヒルベルトスキーム $\text{G-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ を用いた McKay 対応の記述を得ていた．また，可換部分群 $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ による商特異点 $\mathbb{C}^3/G$ の（一般には複数存在する）任意の射影的クレパント解消が，G-constellation というもののモジュライ空間として実現できるという結果 (Craw 氏との共同研究) を得ていた．

(3) 一方可換群の場合の 3 次元の McKay 対応の一般化に用いられるのがダイマー模型である．ダイマー模型とは, 2 次元実トーラスを多角形分割する 2 色グラフである. ダイマー模型に対し, 3 次元 Gorenstein トーリック特異点および関係式付き箙がそれぞれ定義され, 箙の道代数と特異点が関係するらしいことが Hanany ら弦理論の物理学者達により見いだされた．六角形によるダイマー模型の場合，付随する特異点は可換群による商特異点であり，付随する関係式つき箙は McKay 箙というもので，その道代数は多項式環と群の接合積になる．研究代表者は，両立的という条件のもと，箙の表現のモジュライ空間と関係式付き箙の道代数が導来同値になること, および任意の格子多角形に対してそのようなダイマー模型が存在することを, 植田一石氏と共同で示していた．

２．研究の目的

(1) McKay 対応について，より根源的な理解をする．

(2) 可換でない群が $\mathbb{C}^n$ に線形に作用する場合に，G-constellation のモジュライ空間として得られる (部分的) 特異点解消がどのようなものか，という問題にもアプローチする．

(3) 通常のダイマー模型に付随する特異点を 2 次元の場合の A 型の特異点に対応するものとみなし，その D 型版とも言うべきものとして，有限群 G の作用を持つダイマー模型を考え，研究する．基本的問題は，3 次元 Gorenstein トーリック特異点の商（で Gorenstein であるもの）を任意に与えたとき，対応する群作用つきダイマー模型が構成できるか，ということである．さらに，このような “A 型” と “D 型” の考察から，非可換クレパント解消を持つ 3 次元特異点をより一般に考察する．さらに，群作用による箙の「商」の具体的記述について考察したい．それらは，「群作用をもつダイマー模型」から定まるものと導来同値になると期待する．

３．研究の方法

(1) special McKay 対応の大域化については，北海道大学へ出張したり，国内研究集会に同時に参加したりすることにより，中村郁氏と研究打ち合わせを行った．電子メールによる連絡も頻繁に行った．他にも，国内外の出張により，情報収集や他の研究者との意見交換を積極的に行い，図書を含む文献により知識や情報を得た．

(2) 有限部分群 $G \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ に対する G-constellation のモジュライ空間については，国内外の出張により川又氏や Craw 氏，Jung 氏などと意見交換するとともに，研究集会での情報収集に務めた．また，図書を含む文献により知識を増やした．

(3) 群作用つきダイマー模型に関しては，国内外の出張により植田氏や Nolla 氏と研究打ち合わせを行った．特に，Nolla 氏が名古屋大学に滞在した際に，ともに国内の研究集会に出席できたのは有意義であった．これについても，国内外の出張や文献による情報収集を行った．

４．研究成果

(1) 2 次元商特異点に関する，いわゆる special McKay 対応の大域化について，中村郁氏と共同で研究した．有限群 G による 2 次元商特異点 $X = \mathbb{C}^2/G$ に対して，G の既約表現の中に special と呼ばれるものが定義され，それらのうち非自明なものは X の最小特異点解消 Y の既約例外曲線とうまく対応することが知られている．この Y は G-軌道のヒルベルトスキーム $\text{G-Hilb}(\mathbb{C}^2)$ と同型であるが，$Y \to X$ の例外集合の各点に対応する G-軌道のイデアルの中に現れる既約

表現の族を，例外集合上の層として記述することができた．これは special McKay 対応を族として記述するものである．さらに，G-軌道の構造層の socle を見ると，これは一般には special とは限らない表現であるが，その代わりに special な表現だけに注目して socle の類似を定義すると，これもまた special McKay 対応を記述することがわかった．そして，最小特異点解消の導来圏を記述する，reconstruction algebra と 呼ばれる非可換代数に対応する quiver が Wemyss によって導入されているが，この quiver が上記 socle の類似の記述に密接に関 わっており，G-Hilb($\mathbb{C}^2$) の中にこの quiver の情報が隠れていることを発見した．これらの結果の一部は，Quarterly J. Math. より出版された．

(2) 有限部分群 $G \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ に対する G-constellation のモジュライ空間について研究した．研究代表者が以前に行った研究によって，G-cluster のモジュライ空間，すなわち G-Hilb($\mathbb{C}^2$) が商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消であることがわかっていた．ここで，G-cluster という のは，ある特定の安定性パラメータに対して定まる安定性条件を満たす G-constellation である．そこで，安定性のパラメータを動かし たときに G-constellation のモジュライ空間がどう変化するかという問題 (variation of GIT quotients) に取り組み，成果があった．なお，$\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ のアーベル部分群の場合には任意の (射影的) クレパント解消が G-constellation のモジュライ空間として記述できることを研究代表者は Craw 氏と共同で示しているが，本研究で考察したのは，$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の可換とは限らない部分群による 2 次元商特異点の場合である．2 次元商特異点に対して「最大特異点解消」というものが Kollár 氏と Shephard-Barron 氏により定義されているが，本研究において，

① 任意の (generic な) 安定性条件に対してモジュライ空間は最大と最小の特異点解消の間にあることと，

② G が可換又はスモールな場合には，最大と最小の間にある任意の特異点解消は，実際に適当な安定性条件に対応するモジュライ空間に同型であること

が証明できた．なお，一般に商特異点を考える際には，群 G はスモールであるという仮定をしても一般性を失わず，実際前項 (1) の研究はその仮定の下でなされたが，この問題に対しては，スモールという仮定をせずに商特異点をスタックと見て最大特異点解消を定義した上で定式化する方が自然である．鍵となるアイデアは，G を正規部分群 N とその剰余 G/N に分けることと，そのために G-constellation とその安定性の定義を，アフィン空間以外の一般の代数多様体上に拡張することである．これらの成果はプレプリントとして公表された．

(3) 群作用付きダイマー模型について研究した．ダイマー模型とは，２次元トーラス上の２色グラフである．ダイマー模型に対して，格子多角形 Δ と関係式付き箙 Γ をそれぞれ定めることができる．そして，格子多角形 Δ は，3 次元アフィントーリック多様体 X_Δ を定める．ダイマー模型が両立的と呼ばれる条件を満たすとき，関係式付き箙 Γ の道代数 $\mathbb{C}\Gamma$ はアフィントーリック多様体 X_Δ の非可換クレパント解消を与える．ダイマー模型に有限群 G が作用しているとき，G は対応する格子多角形 Δ およびアフィントーリック多様体 X_Δ に自然に作用するが，必ずしも多様体の標準束 K_{X_Δ} の自明化を保たない．そこで，この作用がダイマー模型の一つの面を固定し，さら格子多角形 Δ への作用が一つの格子点を固定すると仮定する．この仮定のもと，G の X_Δ および $\mathbb{C}\Gamma$ への作用の符号を修正して，それぞれその標準束の自明化を保つようにすることができる．これらの修正された作用に関して，G と $\mathbb{C}\Gamma$ の接合積 $G \ltimes \mathbb{C}\Gamma$ が，X_Δ の G による商 X_Δ/G の非可換クレパント解消であることを示した．X_Δ/G はトーリックとも商特異点とも限らず，これによって，そのような特異点の非可換クレパント解消の例が得られることになる．そこで，与えられた格子多角形 Δ に有限群 G が作用するとき，対応する群作用付きダイマー模型（で条件を満たすもの）を構成するということが問題になる．これまでは，場合分けに応じて異なる方法を用いて構成することを試みていたが，完成していなかった．今年度は，より簡明な方法を試みたところ，統一的に構成できることがわかった．以上は 植田氏，Nolla 氏との共同研究であり，その内容はプレプリントとして公開された．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

① Akira Ishii and Iku Nakamura, *Extended McKay correspondence for quotient surface singularities,* The Quarterly Journal of Mathematics, (published online 4 October 2018), hay047, https://doi.org/10.1093/qmath/hay047, 査読有

② Akira Ishii and Kazushi Ueda, *Dimer models and crepant resolutions,* Hokkaido Math. J. 45 (2016), no. 1, 1–42, 査読有, doi:10.14492/hokmj/1470080746

③ Akira Ishii and Kazushi Ueda, *Dimer models and the special McKay correspondence,* Geom. Topol. 19 (2015), no. 6, 3405–3466, 査読有, doi: 10.2140/gt.2015.19.3405

④ Akira Ishii and Kazushi Ueda, *The special McKay correspondence and exceptional collections,* Tohoku Math. J. (2) 67 (2015), no. 4, 585–609, 査読有, doi:10.2748/tmj/1450798075

〔学会発表〕（計 12 件)

① Akira Ishii, Dimer models with group actions, Differential, Algebraic and Topological Methods in Complex Algebraic Geometry, 2018 年 9 月

② Akira Ishii, G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity, Higher dimensional algebraic geometry, 2018 年 3 月 14 日

③ Akira Ishii, G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity, Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry V, 2017 年 11 月 27 日

④ Akira Ishii, G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity, Classification and Moduli Theory of Algebraic Varieties, 2017 年 9 月 11 日,

⑤ Akira Ishii, G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity, 玉原代数幾何サマースクール 2017, 2017 年 8 月 22 日,

⑥ Akira Ishii, G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity, Moduli spaces of sheaves and related topics, 2017 年 2 月 1 日,

⑦ Akira Ishii, Dimer models with group actions, Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 3, 2016 年 9 月 12 日,

⑧ Akira Ishii, Introduction to the McKay correspondence and Artin-Verdier theory, Noncommutative crepant resolutions, Ulrich modules and generalizations of the McKay correspondence, 2016 年 6 月 13 日,

⑨ Akira Ishii, On the special McKay correspondence, Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 1,2015 年 9 月 17 日,

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：中村　郁
ローマ字氏名：(Nakamura, Iku)

研究協力者氏名：植田　一石
ローマ字氏名：(Ueda, Kazushi)

研究協力者氏名：Nolla, Álvaro