

平成 30 年 5 月 24 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04820

研究課題名(和文)局所環のヒルベルト函数論の展開

研究課題名(英文)Hilbert function of local rings

研究代表者

大関 一秀(Ozeki, Kazuho)

山口大学・大学院創成科学研究科・准教授

研究者番号：70445849

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、ヒルベルト函数の理論を用いながら、コーエン・マコーレイ局所環 $(A, m)$ に含まれる $m$ -準素イデアルの構造を分類することを目標とする。特に、Sally加群の理論に着目し、第1ヒルベルト係数による $m$ -準素イデアルとその随伴次数環の構造の分類を行った。主な研究成果は下記の通りである。整閉イデアルのSally加群の構造は特徴的であり、それらを用いて第1ヒルベルト係数による整閉イデアルとその随伴次数環の構造の分類を行った。さらに、解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内に於いて、正規化された第1ヒルベルト係数が相対的に小さい値をとるような $m$ -準素イデアルの特徴付けを与えた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to explore the behavior of the Hilbert functions of ideals in Cohen-Macaulay local rings. I explored the relationship between the first Hilbert coefficient and the structure of the associated graded ring of integrally closed ideals in a Cohen-Macaulay local ring. I also gave a characterization for the almost minimal value of the first Hilbert coefficient in the case of the normal filtration in an analytically unramified Cohen-Macaulay local ring. I strongly used some structure theorems of Sally modules in these results.

研究分野：可換環論

キーワード：ヒルベルト函数 ヒルベルト係数 Rees代数 随伴次数環 Sally加群 コーエン・マコーレイ局所環

### 1. 研究開始当初の背景

本研究は代数学の一分野である可換環論の発展を目指すものであり、その中でも、局所環のヒルベルト函数の理論を用いた可換環論を展開するものである。

局所環のヒルベルト函数の研究は、1960年ごろに P. Samuel による重複度研究を端に開始されたといわれている。その後、D. G. Northcott, C. Huneke, J. D. Sally によって、Rees 代数および随伴次数環の構造研究と深く関わりながら発展してきた。近年では、M. E. Rossi や J. Elias を中心に第 1 ヒルベルト係数の挙動研究が盛んに行われ、数多くの関連論文が発表されている。

コーエン・マコーレイ局所環  $(A, m)$  内に於ける  $m$ -準素イデアルのヒルベルト函数の挙動研究は、Northcott ([N]) によって与えられた第 1 ヒルベルト係数に関する不等式を巡って盛んな議論が行われてきた。特に、[S] に於いて Sally は、第 1 ヒルベルト係数が Northcott の不等式に対して相対的に小さい値をとるような  $m$ -準素イデアルの構造は制御可能ではないかということを目論じた。この予想に対して、Vasconcelos ([V]) によって提唱された Sally 加群の理論が、そのような  $m$ -準素イデアルの構造を解析する際に有効であると考えられるようになった。Sally 加群とは、与えられた  $m$ -準素イデアルによって構成された次数付き加群であり、「そのヒルベルト函数がイデアルのヒルベルト函数の補正項をなす」、「Rees 代数や随伴次数環のコホモロジー量の評価が可能である」など、 $m$ -準素イデアルの情報の主要な部分を内包する。つまり、 $m$ -準素イデアルのヒルベルト函数の挙動や Rees 代数、随伴次数環の構造を決定する際に、Sally 加群の構造が鍵となる。

本研究開始以前に、本研究代表者は、[GN0] にて階数が 1 の Sally 加群の構造の構造を与えていた。しかしながら、階数が 2 以上となる Sally 加群の構造については、その構造解明が課題として挙げられていたものの未解決の状態が続いていた。これに対して、M. V. Pinto ([VP]) によって Sally 加群の構造を巧妙に分解する手法が与えられていたが、この手法を用いることで高い階数を持つような Sally 加群の構造解析が可能となるのではないかと考えられ、[VP] の理論の再考が行われていた。

また、本研究を開始した頃、解析的不分岐な局所環内に於ける正規化された第 1 ヒルベルト係数に関する研究が、[CPR], [P] によって開始された。その中で、正規化されたイデアルのフィルトレーションの Sally 加群の構造に関する議論が行われていたが、それらは本研究対象として非常に興味深い内容であった。

### 2. 研究の目的

本研究は、コーエン・マコーレイ局所環  $(A, m)$  内に於ける Sally 加群の理論を構築しながら、与えられた局所環内の  $m$ -準素イデアルの構造をヒルベルト函数の挙動によって分類することを目的とする。

上述の通り、一般の  $m$ -準素イデアルに対して、階数が 2 以上の Sally 加群の構造の制御は困難であるが、本研究着手前の予備研究によると、極大イデアル  $m$  や整閉となる  $m$ -準素イデアルについては、ある程度大きな階数を持つような Sally 加群についてもその構造を制御できるのでないかということが示唆されていた。これに対して、本研究では、コーエン・マコーレイ局所環内に於ける整閉イデアルの第 1 ヒルベルト係数による特徴付けを目標とした。

さらに、解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内に於ける  $m$ -準素イデアルの正規化された第 1 ヒルベルト係数の挙動解析も本研究目的の一つである。正規化されたイデアルのフィルトレーションによる Sally 加群の構造論を整備しながら、Rees 代数および随伴次数環の構造の分類を行うことを目標とする。

### 3. 研究の方法

上述の通り、 $m$ -準素イデアルの第 1 ヒルベルト係数の理論を構築する上で、Sally 加群の理論が有効であると考えられることから、その理論の構築を常に念頭に置きながら研究に取り組んだ。特に、研究開始当初より着手していた、M. V. Pinto による [VP] の考察を行いながら問題解決に向けての理論構築を行った。

解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内に於ける正規化された第 1 ヒルベルト係数については、[VP] の理論と併せて、先行結果である [CPR], [P] を注意深く考察し、課題解決の為の足掛かりとした。

本研究を実施する上で、M. E. Rossi 氏 (ジェノバ大学、イタリア) の協力が有効であると考えられることから、同氏を本研究課題の研究協力者に据えて取り組んだ。平成 27 年 9 月、平成 29 年 3 月、6 月にそれぞれ、ジェノバ大学を約 3 週間訪問し、Rossi 氏と本研究課題に関する研究打ち合わせを行った。

また、国内では日本数学会や可換環論シンポジウム、環論および表現論シンポジウム、海外ではベトナムで開催された可換環論関連の国際会議にて講演発表を行いながら研究内容を精査し、発展させていった。

### 4. 研究成果

コーエン・マコーレイ局所環内の整閉イデアルの構造について、第 1 ヒルベルト係数による新たな特徴付けを与えた。具体的には、整閉イデアルについて与えられていた不等式

(c. f. [EV]等) に対して, 第1ヒルベルト係数が相対的に小さい値をとるような整閉イデアルの Sally 加群の構造を決定した。それによって, ある条件を満たす整閉イデアルのヒルベルト函数の挙動や随伴次数環の構造を完全に分類することが可能となった。さらに, これらの研究成果については, Rossi 氏との共著論文[雑誌論文欄]として纏め, [学会発表欄, ~]にて口頭発表を行った。

さらに, 平成 29 年のジェノバ大学訪問時には Rossi 氏に加えて, S. K. Masuti 氏と共に, 解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内に於ける正規化されたヒルベルト函数の挙動研究にも着手をした。その中で, [VP]を基に構成した理論を, イデアルの正規化されたイフィルトレーションの場合に適用することで, 正規化された第1ヒルベルト係数による新たな  $m$ -準素イデアルの特徴づけを与えた。この研究成果については, 学会発表欄, ~にて口頭発表を行った。

これらの研究成果を通じて得られた技術は, 今後の局所環のヒルベルト函数の挙動研究に於いても有効なものであると考えられる。

#### 引用文献

- [CPR] A. Corso, C. Polini, and M. E. Rossi, Bounds on the normal Hilbert coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 144, 2016, 1919-1930.
- [GNO] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, The structure of Sally modules of rank one, Math. Res. Lett., 15, 2008, 881-892.
- [EV] J. Elias and G. Valla, Rigid Hilbert functions, J. Pure Appl. Algebra 71 (1991), 19-41.
- [N] D. G. Northcott, A note on the coefficients of the abstract Hilbert function, J. London Math. Soc., 35, 1960, 209-214 .
- [P] T. T. Phuong, Normal Sally modules of rank one, J. Algebra, 493, 235-250 (2018).
- [S] J. D. Sally, Hilbert coefficients and reduction number 2, J. Algebraic Geom.1, 1992, 325-333.
- [V] W. V. Vasconcelos, Hilbert functions, analytic spread, and Koszul homology, Contemp. Math., 159, 410-422 (1994).
- [VP] M. V. Pinto, Hilbert functions and Sally modules, J. Algebra, 192, 1997, 504-523.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Kazuho Ozeki and Maria Evelina Rossi, The structure of the Sally modules of integrally closed ideals, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, 227, 2017, 49-76.

<https://doi.org/10.1017/nmj.2016.47>

Shiro Goto and Kazuho Ozeki, Sectional Genera of parameter ideals, Journal of Algebra, 査読有, 446, 2016, 58-76.

<https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.09.005>

Shiro Goto and Kazuho Ozeki, The second Hilbert coefficients and the homological torsions of parameters, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 219, 2015, 1685-1703.

<https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.09.005>

[学会発表](計12件)

Kazuho Ozeki, A study of the second normal Hilbert coefficient, Mini-Workshop on Commutative Algebra, 北海道教育大学札幌駅前サテライト(北海道札幌市), 2018年3月.

Kazuho Ozeki, Almost minimal normal Hilbert coefficients, International Conference on Commutative Algebra and its interaction to Combinatorics, Discrete Geometry and Singularity Theory, Institute of Mathematics-Hanoi (Hanoi, Vietnam), 2017年9月.

Kazuho Ozeki, Almost minimal normal Hilbert coefficients, International School and Workshop on Commutative Algebra, Ton Duc Thang University (Ho Chi Minh City, Vietnam), 2017年9月.

Kazuho Ozeki, The structure of the Sally modules of integrally closed ideals, Algebra & Geometry Seminar, Genova University (Genova, Italy), 2017年3月.

Kazuho Ozeki, The first Hilbert coefficient and Buchsbaumness of associated graded rings, International Workshop on Commutative Algebra, Thai Nguyen University (Thai Nguyen, Vietnam), 2017年1月.

Kazuho Ozeki, The first Hilbert coefficient and Buchsbaumness of associated graded rings, 第39回可換環論シンポジウム, IPC 生産性国際交流センター(神奈川県葉山市), 2016年11月.

Kazuho Ozeki, The first two Hilbert coefficients and Buchsbaumness of associated graded rings, Japan-Vietnam Workshop on Commutative Algebra, -by and for young mathematicians- Local rings, Combinatorics, and Representation Theory, 明治大学生田キャンパス(神奈川県川崎市), 2016年9月

Kazuho Ozeki, The structure of the Sally modules of integrally closed ideals, 第49回環論および表現論シンポジウム, 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス(大阪府堺市), 2016年9月.

大関 一秀, 整閉イデアルのSally加群の構造について, 2016年度日本数学会年会, 筑波大学(茨城県つくば市), 2016年3月.

Kazuho Ozeki, The structure of the Sally modules and the first Hilbert coefficient of ideals, Workshop on Commutative Algebra -Part II, Local Algebra and Representation Theory, VIASM's villa (Tuan Chau, Vietnam), 2016年1月.

Kazuho Ozeki, The structure of the Sally modules of integrally closed ideals, Ring Theory and Representation Theory Seminar, 名古屋大学多元数理科学研究科(愛知県名古屋市), 2015年12月.

Kazuho Ozeki and Maria Evelina Rossi, The structure of the filtration of Sally modules, 第37回可換環論シンポジウム, 岡山シーサイドホテル(岡山県倉敷市), 2015年11月.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

大関 一秀(Ozeki, Kazuho)

山口大学大学院・創成科学研究科・准教授

研究者番号: 70445849