

令和元年6月17日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04823

研究課題名(和文) 頂点作用素代数の誘導表現に関する研究

研究課題名(英文) Study on induced modules of vertex operator algebras

研究代表者

安部 利之 (Abe, Toshiyuki)

愛媛大学・教育学部・教授

研究者番号：30380215

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、頂点作用素代数の誘導表現の理論の構築を目指し、twisted 加群に対応する普遍包絡環の構成やその一般化を行った。誘導表現は圏論的構成が主流であるが、この研究では頂点作用素代数の代数的構造を用いた誘導表現の構成を目指した。関連して、30年来の予想であったムーンシャイン頂点作用素代数の構成に関する予想も解決や原田予想の成立するための十分条件の発見等の成果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点作用素代数はムーンシャイン予想の解決を目的の一つとして構成された代数系である。可算無限個の演算を持つがその表現論はその導入以来多くの進展があった。その誘導表現の構成は圏論的構成が主流であるが、ここでは代数的構成を目指し、twisted 加群やその一般化を与える普遍包絡環を構成した。その過程でムーンシャイン頂点作用素代数の構成に関する予想を解決したり、有限群論の問題にも取り組むことができた。

研究成果の概要(英文)：On this study, we try to give a construction of induced modules of vertex operator algebras. We give a construction of universal enveloping algebras which give twisted modules and their generalizations. The construction of induced modules are usually based on the structure of module category with fusion product. But we use algebraic structure of vertex operator algebras. As related consequences we solve a conjecture on construction of moonshine vertex operator algebra and give a sufficient condition to hold Harada conjecture on finite group.

研究分野：頂点作用素代数の表現論

キーワード：頂点作用素代数 表現論 誘導表現 普遍包絡環

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19, CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

頂点作用素代数は約 30 年前に共形場理論の数学的モデルとして、そしてモンスター群と楕円  $j$ -関数をつなぐムーンシャイン頂点作用素代数の導入を動機として始まった。その導入以降、表現論の研究が進展し、現在ではモジュラーテンソル圏をはじめとする様々な技術との関連が急速に検証されている。その中で誘導表現の構成はフュージョン積を用いたものが知られており、特にフュージョン積で群をなす単純カレントの集合による拡大の理論が良く知られていた。

### 2. 研究の目的

単純カレント拡大の理論は可換群の自己同型群によるオービフォールド模型(群の固定点のなす部分頂点作用素代数)の拡大の理論であるが、オービフォールド模型には自己同型による twisted 加群も付随する。単純カレント拡大の場合はその twisted 加群も大まかにとらえることができるが、本研究では非可換の場合も含めオービフォールド模型の拡大をとらえるためにその誘導表現の構成方法について考察することを目的とした。

### 3. 研究の方法

誘導表現の構成にあたり、フュージョン積ではなく、頂点作用素代数の代数的構造から直接構成することを考えた。そのためまず普遍包絡環の構成を行った。通常に加群に対応する普遍包絡環はすでに先行研究があるので、それを参考に twisted 加群に対応する普遍包絡環を定義する。その構成は自然にできるが、位数が異なるが共役ではない自己同型に付随する twisted 加群を統一的に扱う方法を発見することである。その一つに  $(V, T)$ -加群を用いる方法について普遍包絡環の観点から研究する。

### 4. 研究成果

本研究において、主要な成果は以下の通りである。

#### (1) twisted 加群に対応する普遍包絡環とその一般化の構成。

研究方法にあるように、通常に加群に対応する普遍包絡環は Frenkel-Zhu([1])により導入され、松尾-永友-土屋([2])により厳密に整備された。松尾-永友-土屋による構成方法は current 代数を意識したものであるため、その構成方法を twisted 加群に付随する current に適用することで twisted 加群に対する普遍包絡環を構成できた。更に田辺により導入された twisted 加群の一般化である  $(V, T)$ -加群([3])に対しても、普遍包絡環を構成した。ただこちらについては  $(V, T)$ -加群に対する普遍包絡環に関しては、設定が人工的になっており、その不自然さに関してはまだ解消できていない。この普遍包絡環をオービフォールドの理論に適用するためには、位数の等しい非共役な自己同型を統一的に扱う自然な枠組みが得られるべきであり、この点において現在も考察中である。

#### (2) A 型のルート格子に付随する符号頂点作用素代数の表現論

誘導表現の研究を行う際、単純 current に関し、量子次元に関し学んだ。量子次元は既約加群の指標を求めることで計算できるが、A 型のルート格子に付随する格子頂点作用素代数のある外部自己同型に関し、量子次元の計算を twisted 加群に適用することで、オービフォールド模型の既約加群の量子次元を完全に決定した。その一方で A 型ルート系の discriminant として得られる有限アーベル群に格子の構造から内積と重みを定義し、符号と考えることで符号頂点作用素を構成した。そのオービフォールド模型の既約加群の量子次元を上記で計算した量子次元を用いて計算すると、符号が自己双対等の良い性質を持つときにすべての既約加群の量子次元が 1 となることを示した。これは任意の拡大が単純 current 拡大となることを意味し、この構成をムーンシャイン頂点作用素代数に適用することで新しいモンスター群の構造の表現が得られると期待している。本研究は Ching Hung Lam 教授、山田祐理教授との共同研究である。

#### (3) ムーンシャインの $Z_p$ -オービフォールド構成

本研究成果は、頂点作用素代数の導入の動機の一つである、ムーンシャイン頂点作用素代数の構成方法に関する 30 年来の予想であり、提唱時より成り立つと強く信じられていた予想である。

(2) と同様にリーチ格子に付随する格子頂点作用素代数の外部自己同型によるオービフォールド模型を研究する際に、素数位数ではなくその二倍の位数でまず分解しその単純 current 拡大として再構成することでムーンシャイン頂点作用素代数が構成できることを見出した。本研究は Ching Hung Lam 教授、山田祐理教授との共同研究である。

#### (4) 原田予想に関する研究

本研究成果は誘導表現の研究の過程において、有限群論の指標の構造を調べる際に、原田予想が成り立つための十分条件を発見した。原田予想は有限群の共役類の基数の積と既約次数の積の比が整数になるという予想であるが、その簡明さとは裏腹に現在も部分的な成果や考察はあるが、その解決にはまだめどがつかない予想の一つである。本研究では指標値が代数的数であるという基本的な性質に着目し、指標表から自然数値不変量を構成することで不変量が 1 になるときに原田予想が成立することを示した。しかし  $p$ -群では不変量が  $p$  の倍数となることの証明や簡単な群について不変量が 2 以上になるものを発見できるで、必要十分ではないことも容易にわかっている。この不変量に関する研究に関し、原田予想の肯定的解決または否定的解決両方を目指した研究に発展した。本研究は新規の科学研究費課題研究として採択された。

## 参考文献

- [1] Frenkel, Igor B., Zhu, Yongchang, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, Duke Math. J. 66 (1992), no. 1, 123-168.
- [2] Matsuo, Atsushi; Nagatomo, Kiyokazu; Tsuchiya, Akihiro Quasi-finite algebras graded by Hamiltonian and vertex operator algebras. Moonshine: the first quarter century and beyond, 282-329, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 372, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [3] Tanabe, Kenichiro, A generalization of twisted modules over vertex algebras. J. Math. Soc. Japan 67 (2015), no. 3, 1109-1146.

## 5. 主な発表論文等

### 〔雑誌論文〕(計2件)

安部利之, Ching Hung Lam, 山田祐理, Extensions of tensor products of  $Z_p$ -orbifold models of the lattice vertex operator algebra  $V_{2A_{(p-1)}}$ , Journal of Algebra, 査読有, 510 巻, 2018, 24 - 51

DOI 10.1016/j.jalgebra.2018.04.036

安部利之, Ching Hung Lam, 山田祐理, On  $Z_p$ -orbifold constructions of the Moonshine vertex operator algebra, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 290巻(3), 2018, 683 - 697

DOI 10.1007/s00209-017-2036-3

### 〔学会発表〕(計6件)

Extensions of tensor products of vertex operator algebras  $V_{2A_n}$ , Vertex Operator Algebras and Related Topics, Sichuan University, 2018年11月4日

Extensions of tensor products of the VOA  $V_{2A_n}$ , RIMS 共同研究(公開型)「組合せ論的表現論の諸相」, 京都大学数理解析研究所, 2018年10月12日

原田予想への一考察, 草津群論セミナー, 2018年7月28日

Group-like fusion をもつ頂点作用素代数の構成について, 日本数学会, 2017年度年会, 首都大学東京, 2017年3月25日

A construction of VOAs having group-like fusion, Finite Groups and Vertex Operator Algebras, Tokyo Woman's Christian University, 2017年3月21日

The Leech lattice VOA as an extension of  $V^{\times 6}_{2A_4}$ , 第33回代数的組合せ論シンポジウム, 滋賀大学, 2016年6月25日

Classification of irreducible modules of  $Z_2 \times Z_2$ -orbifold model of lattice vertex operator algebras, Vertex Operator Algebras and Related Topics, Sichuan university, 2015年9月7日

頂点作用素代数の量子次元, 愛媛大学談話会, 愛媛大学, 2015年6月26日

### 〔図書〕(計0件)

### 〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:

発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：Ching Hung Lam

ローマ字氏名：(LAM, ching hung)

研究協力者氏名：山田祐理

ローマ字氏名：(YMAMADA, hiromichi)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。