

令和元年5月24日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04826

研究課題名(和文) 多項式環の自己同型群の構造解析とその応用

研究課題名(英文) Structural analysis of the automorphism group of a polynomial ring and its application

研究代表者

黒田 茂 (Kuroda, Shigeru)

首都大学東京・理学研究科・教授

研究者番号：70453032

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：多項式は数学では欠かせない概念であり、それらのなす環は現代代数学における基本的対象である。しかし、多項式環を巡って、様々な難問が未解決のまま残されており、世界的に研究が行われている。こうした問題の研究では、多項式環の自己同型やそれらのなす群が重要な役割を果たす。本研究では、多項式環の自己同型群の部分群や関連する対象について詳細に調べ、様々な新しい知見を得た。また、多項式自己同型に関する知識を活かし、ヒルベルトの第14問題の新しい反例を構成することにも成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ヒルベルトの基底定理をはじめ、多項式環に関する基本的な結果は、現代代数学において重要な役割を果たしている。多項式環の基本的な性質については未だ不明な点が多く、それらを解明することは、将来的に代数学の発展に多大な貢献をするはずである。多項式環の自己同型や自己同型群は、多項式環を理解するうえで欠かせないものであり、本研究で得られた成果は、今後の多項式環研究で重要な意味を持つと考えられる。

研究成果の概要(英文)：A polynomial is an indispensable concept in mathematics, and the ring formed by them is a basic object in modern algebra. However, there remain various difficult open problems concerning polynomial rings, which have been studied worldwide. In the study of such problems, automorphisms of a polynomial ring and the ring formed by them play important roles. In this research, we investigated subgroups of the automorphism group of a polynomial ring and related objects, and obtained various new information about them. We also succeeded in constructing a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem by using the knowledge of polynomial automorphisms.

研究分野：可換環論

キーワード：多項式環 自己同型写像 安定余順自己同型 加法群作用 ヒルベルトの第14問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

多項式環の周辺には、基本的だが非常に難解な問題が多数存在する。それらは、「アフィン代数幾何学(多項式環論)」と呼ばれる研究領域を形成し、世界的に研究が行われている。こうした問題の研究では、多項式環の自己同型や自己同型群の構造に関する情報が非常に有効である。しかし、多項式環の一つ一つの自己同型でさえ、非常に難しい対象であるため、この方向からの研究はあまり進んでいない。

### 2. 研究の目的

研究代表者の従前の研究を発展させながら、多項式環の自己同型や自己同型群の構造について詳細な研究を行う。また、それらをアフィン代数幾何学における他の問題の研究に応用し、進展を図る。

### 3. 研究の方法

国内外の関連領域の研究者たちと交流しながら研究を進めた。具体的に以下を行った。

- ・谷本龍二(静岡大学), 小島秀雄(新潟大学)たちと協力して、毎年2回「多項式環論セミナー」を開催した(ただし、2018年2月は後述のPRAAG2018として開催)。
- ・関西学院大学で開催される「アフィン代数幾何学研究集会」に参加・協力した。
- ・小野田信春(福井大), Gene Freudenburg (Western Michigan University)と共同で、国際会議「Polynomial Rings and Affine Algebraic Geometry (PRAAG2018)」を開催した(2018年2月12日~16日, 首都大学東京)。23名の海外研究者を含む60名超が参加した。
- ・海外の大学・研究機関等を訪問した。

### 4. 研究成果

#### (1) 安定余順自己同型の研究

多項式環の自己同型群の構造を調べるうえで、アフィン自己同型全体と一つの非アフィン自己同型  $F$  で生成される部分群の研究は基本的である。この部分群が順部分群を含むとき、 $F$  は余順であるという。余順自己同型の概念は E. Edo によって導入され、最近、活発に研究が行われている。しかし、基礎体が正標数場合に不明な点が多いなど、一般に扱いが難しい。本研究ではその困難を解消するために「安定余順自己同型」の概念を新たに導入した。さらに、一般の可換環を係数とする多項式環の自己同型  $F$  に対し、 $F$  がいつ安定余順になるか判定するため条件について詳細な研究を行った。その結果、必要性および十分性それぞれについて、非常に精密な判定条件が得られた。特に、係数環の標数が素数または0で、かつ、係数環が無限体を含む場合には、これは自己同型が安定余順であるための必要十分条件になる。また、この結果を使うことにより、Edo-Lewis が構成した非余順な自己同型の例が、実は安定余順であることも示した。それにより、安定余順の概念が、余順の概念の真の拡張であることが判明した。これらの結果は、雑誌論文 として発表した。

ところで、この研究では、多項式環の自己同型群の部分群  $NG(n, R)$  を新たに定義した。この部分群は、研究代表者が過去に E. Edo との共同研究で扱った部分群とよく似ている。Edo との共同研究で扱った部分群は、恒等写像以外の任意の元が基本簡約を許容するという著しい性質を持つ。そこで、比較のため、 $NG(n, R)$  の元の基本簡約可能性について、微分作用素の技法を用いて調べた。その結果、Edo との共同研究で扱った部分群と本質的に異なる性質を持つことが判明した。この成果については、雑誌論文 で発表した。安定余順自己同型に関するこれらの研究成果は、多項式環の自己同型の部分群を調べるための新たな手段を与えたという点で、大きな意義があると考えられる。

#### (2) 加法群作用の研究

アフィン空間への加法群作用から、多項式環の自己同型の族が得られる。現在、加法群作用の様々な構成法が知られており、興味深い自己同型が加法群作用を用いて構成されている。アフィン代数幾何学の諸問題の研究では、加法群作用がしばしば重要な役割を果たす。本研究では加法群作用の代数的構造に関する研究を行った。

まず、加法群作用を持つ整域の構造に関する「中井の定理」について、従前の研究で一般化に取り組んでいたが、結果をより深化させるために、Danielewski 曲面の座標環を具体例として用いてさらなる考察を行った。その結果、定理の仮定に含まれる「幾何学的素元分解整域」という条件は、除外すると主張が成り立たなくなることが分かった。これらの結果をまとめて雑誌論文 として発表した。

また、加法群作用の代数的構造についての理解を深める中で、アフィン平面への加法群作用の分類に関するレンチュラー・宮西の定理が、2変数多項式環の自己同型に関してよく知られた Jung-van der Kulk の定理から簡単に導けることを見出した。現在のアフィン代数幾何学の研究では、2次元の場合の結果を基礎に高次元の場合に足を踏み入れることも少なくなく、2次元の理論の整理は、高次元を窺う上でも有益と考えられる。この結果は、雑誌論文 として発表した。

#### (3) ヒルベルトの第14問題の研究への応用

研究代表者は従前の研究において、ヒルベルトの第 14 問題の反例の構成に関していくつかの重要な成果を挙げた。本研究では、多項式環の自己同型についての知見を活かすことで、極めてシンプルで、なおかつ多くの反例を作り出せる理論の構築に成功した。

ヒルベルトの第 14 問題は、 $n$  変数有理関数体  $k(X)$  の部分体  $L$  で基礎体  $k$  を含むものと、 $n$  変数多項式環  $k[X]$  の共通部分  $L \cap k[X]$  が  $k$  代数として有限生成かを問う問題である。本研究の成果によれば、 $L$  がある種の「極小性」を持ち、かつ、 $k$  上の超越次数が 2 以上であるとき、 $L$  に対して「安定変形」を施すことで、常に  $L$  をヒルベルトの第 14 問題の反例に「改変」することができる。「極小性」の仮定は実のところあまり本質的ではなく、この結果から、事実上ほとんど全ての  $L$  をヒルベルトの第 14 問題の反例に「改変」できることが分かる。

研究代表者の 2007 年の論文において、 $n=3$  かつ  $[k(X):L]=2$  の場合のヒルベルトの第 14 問題が未解決のまま残されたが、今回の結果によってこれが否定的に解決した。この成果は、ヒルベルトの第 14 問題の反例の構成に関して、これまで研究代表者が行ってきた研究の集大成の一つといえる。この成果は雑誌論文として発表した。

#### (4) 標数位数自己同型の研究

標数  $p>0$  の体上では、加法群の元の位数は（単位元でなければ）常に  $p$  である。従って、アフィン空間への加法群作用から、位数  $p$  の自己同型が誘導される。そのため、位数  $p$  の自己同型の研究は、加法群作用の研究と密接な関係がある。従前の研究で、多項式環の位数  $p$  の自己同型について予備的な考察を行っていたが、本研究でそれをさらに発展させた。主要な成果として、3 次元アフィン空間への階数 3 の加法群作用が任意に与えられたとき、それに適当な「改変」を施すことで、階数 3 の自己同型が必ず構成できることを示した。また、宮西正宜は位数  $p$  のある自己同型の具体例を構成し、その不変式環が素元分解整域であるか否かという問題を提起したが、この問題を一般化したうえで否定的に解決することにも成功した。これらの成果は雑誌論文として発表した。この方向の研究は非常に重要であると考えられるため、他の問題等とも絡めながら、更なる研究を行う予定である。

#### (5) 国際会議の開催

本研究課題の大きな取り組みの一つとして、2018 年 2 月に国際会議 Polynomial Rings and Affine Algebraic Geometry (PRAAG2018) を首都大学東京で開催した。海外からの招待研究者 23 名を含む 60 名超が参加し、極めて有意義な議論や情報交換が行われた。「多項式環 (polynomial ring)」を中心に据えた国際会議の日本での開催は稀有であり、この国際会議の開催は、関連領域の研究の活性化にも大きく貢献したと考えている。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 8 件)

[Shigeru Kuroda](#), Hilbert's fourteenth problem and field modifications, arXiv:1803.08002, 2018 年, 10 ページ. (査読無)

[Shigeru Kuroda](#), Stably co-tame polynomial automorphisms over commutative rings, Transform. Groups 22 (2017), no. 4, 1031-1040. (査読有)  
DOI: 10.1007/s00031-017-9427-8

[Shigeru Kuroda](#), A generalization of Nakai's theorem on locally finite iterative higher derivations, Osaka J. Math. 54 (2017), no. 2, 335-341. (査読有)  
<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1496282427>

[Shigeru Kuroda](#), The automorphism theorem and additive group actions on the affine plane, Nihonkai Math. J. 28 (2017), no. 1, 65-68. (査読有)  
<https://projecteuclid.org/euclid.nihmj/1520391684>

黒田茂, 微分作用素と多項式環, 第 61 回代数学シンポジウム報告集, 2017 年, 26 ページ. (査読無)  
[http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp\\_past/algsymp16\\_files/ring-theory/2-kuroda.pdf](http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp16_files/ring-theory/2-kuroda.pdf)

[Shigeru Kuroda](#), Stably co-tame polynomial automorphisms, 第 38 回可換環論シンポジウム報告集, 2017 年, 21 - 27. (査読無)

[Shigeru Kuroda](#), Non-factoriality of invariant rings, 第 28 回可換環論セミナー報告集, 2016 年, 79-87. (査読無)

[Shigeru Kuroda](#), Polynomial automorphisms of characteristic order, 第 37 回可換環論シンポジウム報告集, 2016 年, 104-111. (査読無)

[学会発表] (計 2 3 件)

[Shigeru Kuroda](#), Hilbert's fourteenth problem and birational modifications, The 10th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, University of Hue (ベトナム), 2018 年 9 月 11 日

[Shigeru Kuroda](#), A friendly introduction to polynomial automorphisms and related topics

(連続講義), Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (ベトナム), 2018年5月3日, 5月4日

Shigeru Kuroda, Non-finitely generated polynomial subalgebras and polynomial automorphisms, Seminar on Algebra and Number Theory, Institute of Mathematics (ベトナム), 2018年5月2日

Shigeru Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and birational modifications, 第4回杜の都代数幾何学研究集会, 東北大学, 2018年3月8日

Shigeru Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and birational modifications, Polynomial Rings and Affine Algebraic Geometry (PRAAG2018), 首都大学東京, 2018年2月15日

Shigeru Kuroda, Non-finitely generated polynomial subrings and modification of  $G_a$ -actions, 第39回可換環論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2017年11月15日

黒田茂, Non-finitely generated polynomial subrings and modification of  $G_a$ -actions, 多項式環論セミナー, 静岡大学, 2017年9月19日

黒田茂, Non-finitely generated polynomial subrings and modification of  $G_a$ -actions, 日本数学会秋季総合分科会(代数学), 山形大学, 2017年9月14日

Shigeru Kuroda, A new proof of the Rentschler-Miyayama theorem, 吉林大学(中国), 2017年9月17日

Shigeru Kuroda, Stably co-tame polynomial automorphisms, Algebra Seminar, 吉林大学(中国), 2017年9月14日

Shigeru Kuroda, Hilbert's Fourteenth Problem and field modifications, アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学梅田キャンパス, 2017年3月5日

黒田茂, Hilbert's Fourteenth Problem and field modifications, 第9回多項式環論セミナー, 首都大学東京, 2017年2月16日

黒田茂, Hilbert's Fourteenth Problem and field modifications, 第29回可換環論セミナー, 山口大学, 2017年2月2日

Shigeru Kuroda, Stably co-tame polynomial automorphisms, 第38回可換環論シンポジウム(9th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra), IPC 生産性国際交流センター, 湘南国際村, 2016年11月18日

Shigeru Kuroda, Stably co-tame polynomial automorphisms, Frontiers in Elliptic Holomorphic Geometry, Jevnaker(ノルウェー), 2016年10月11日

黒田茂, 微分作用素と多項式環, 第61回代数学シンポジウム, 佐賀大学本庄キャンパス, 2016年9月10日

黒田茂, Non-rational counterexamples to Hilbert's Fourteenth Problem, 第8回多項式環論セミナー, 静岡大学, 2016年8月25日

Shigeru Kuroda, Stably co-tame polynomial automorphisms over commutative rings, The 14th Affine Algebraic Geometry Meeting, 関西学院大学梅田キャンパス, 2016年3月6日

黒田茂, Stably co-tame polynomial automorphisms over commutative rings, 第7回多項式環論セミナー, 首都大学東京, 2016年2月20日

黒田茂, On factoriality of invariant rings, 第28回可換環論セミナー, 岡山理科大, 2016年1月26日

⑲ Shigeru Kuroda, Polynomial automorphisms of characteristic order, The 37th Japan Symposium on Commutative Algebra, 倉敷シーサイドホテル, 2015年11月21日

⑳ Shigeru Kuroda, Characteristic order automorphisms 1, 2, 3(連続講演), 専題学術報告, 吉林大学(中国), 2015年9月9日~11日

㉑ 黒田茂, Polynomial automorphisms of characteristic order, 第6回多項式環論セミナー, 静岡大学, 2015年8月20日

[その他]

主催した国際会議のホームページ

Polynomial Rings and Affine Algebraic Geometry, February 12-16, 2018

<https://sites.google.com/view/praag-2018/home>

## 6. 研究組織

### (1) 研究協力者

研究協力者氏名: 小島秀雄

ローマ字氏名: Kojima, Hideo

所属研究機関: 新潟大学

部局名: 大学院自然科学研究科

職名: 教授

研究者番号：90332824

研究協力者氏名：谷本龍二  
ローマ字氏名：Tanimoto, Ryuji  
所属研究機関：静岡大学  
部局名：教育学部  
職名：准教授  
研究者番号：20547062

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。