様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８２８

研究課題名（和文）コーエン・マコーレー錐とその応用

研究課題名（英文）Cohen-Macaulay cone and its application

研究代表者
蔵野　和彦（Kurano, Kazuhiko）
明治大学・理工学部・専任教授
研究者番号：９０２０５１８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：コーエンマコーレー錐が原点で尖っていることを用いれば、各自然数 r に対して階数 r の極大コーエンマコーレー加群の数値的同値類は有限個であることが示される。環が3次元超曲面孤立特異点である場合、テータペアリングの議論を用いることによって、階数 1 の数値的同値類と線形同値類が一致することが証明できる。これによって、3次元超曲面孤立特異点の場合、階数 1 の極大コーエンマコーレー加群は同型を除いて有限個であることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義
正標数の体を含む完備局所環に対して、その部分環である正則局所環で、その正則局所環から元の完備局所環は有限生成加群であり、商体の拡大が有限次分離拡大であるものが存在することが Gabber によって証明された。この事実は、整数論や代数幾何学、可換環論においても様々な場面で使われており、非常に重要な定理である。ここで、その Gabber の定理に対して、非常にエレメンタリーな証明を与えることに成功した。

研究成果の概要（英文）：Using the fact where the Cohen-Macaulay cone is pointed at the origin indicates that there is a finite number of numerical equivalence classes of maximal Cohen-Macaulay modules of rank r for each natural number r. If the given ring is a 3-dimensional hypersurface isolated singularity, it can be proved that, for rank 1 modules, the numerical equivalence class and the linear equivalence class coincide by using the argument of theta pairing. From this, it was found that, in the case of a 3-dimensional hypersurface isolated singularity, there is only finite number of rank 1 maximal Cohen-Macaulay modules up to isomorphism.

研究分野：可換環論

キーワード：極大コーエンマコーレー加群　コーエンマコーレー錐　因子類群

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

代数幾何学では、非特異射影多様体上の因子と曲線との交点数を考え、それによって数値的同値を定義して、曲線で生成される自由アーベル群を数値的同値で割ってできる格子が非常に重要な研究対象となっている。その格子に実数体 R をテンソルした有限次 R-ベクトル空間の中で、曲線によって生成される錐(あるいは、その閉包)を考える。その Kleiman-森錐に対して錐定理が証明され、そこから双有理幾何が爆発的に発展した。

局所環上でも、上に近いことが起こる。つまり、藏野によって局所環 A 上の有限生成加群のグロタンディェク群 G_0(A) 上に数値的同値が定義され、それで割ると格子 \overline{G_0(A)} が得られることが証明されていた。

２．研究の目的

その格子に実数体 R をテンソルした有限次 R-ベクトル空間 \overline{G_0(A)}_R の中で、極大コーエン・マコーレー加群（以下、MCM と略す）によって生成される錐を考える。それを局所環のコーエン・マコーレー錐と呼び、C_{CM}(A) と書くことにする。

我々の状況では、MCM が（代数幾何学の理論の中での曲線、あるいは豊富な因子等の役割を果たす) "positive 元"であると考えている。この状況で、局所環上の加群論においても交点理論を展開したい。

３．研究の方法

コーエン・マコーレー錐 C_{CM}(A) は強凸である(つまり、原点で尖っている)。これは、環に全く条件を付けずに成立する。このことから、コーエン・マコーレー錐の中の階数 1 の加群に対応する格子点は、高々有限個である。また、3 次元超曲面孤立特異点の場合は、因子上で線型同値と数値的同値が一致することがテータ不変量の議論によって証明することができる。このことを完全交叉の場合に拡張できるのではないかと考えている。

コーエン・マコーレー錐 C_{CM}(A) の境界にある加群の性質を調べる。代数幾何学での Kleiman-森錐においてもそうだが､錐において境界あるいは 1 次元の face 上には非常に特徴的な元がある。C_{CM}(A) は非退化な錐であるが、例えば、境界にある MCM から錐の内点の MCM へは全射は作れないことが簡単にわかる(全射の核は MCM であるが、グロタンディェク群の演算により、その核は C_{CM}(A) の外に出てしまうから)。MCM の表現論は、(可換)環論の中でも非常に活発に研究されている分野であり、様々な技術が開発され、いろいろ名前の付いた特別な MCM が定義され研究されている。どの MCM が錐の境界にあるかを調べたい。ベクトル束のスロープの理論が C_{CM}(A) の研究とつながりがあるような漠然とした予感を持っている。

４．研究成果

カンザス大学の Dao 教授との共同研究によって、3 次元超曲面孤立特異点には、階数１の MCM は、高々有限個しかないということが証明できた。

Grothendieck 群や Chow 群を数値的同値で割ると有限生成の格子が得られる。それに実数体をテンソルして有限次元ベクトル空間を考える。ここでは、収束・発散などが議論できる。そのベクトル空間の中で､MCM の張る錐を考える｡ミシガン中央大の Chan 教授との共同研究で、MCM 錐の基本性質を調べた｡応用として、様々な Hilbert-Kunz 関数の例を構成することに成功した。

Huneke-McDermott-Monsky の結果により、正規局所環のヒルベルト・クンツ関数は、第二係数まではきれいにふるまうことがわかる。藏野により、この第二係数は、Q-ゴーレンシュタイン環であれば 0 になることが証明されている。ミシガン中央大の Chan 教授との共同研究で、正規(R1 + S2)という仮定を R1 のみに制限しながら、上の二つの結果がどのくらい拡張できるかを調べた。

完備局所環の構造定理は、可換環論の定理の中でも最も重要なものの一つである。その系として、等標数の完備局所整域は、体上の形式的冪級数環上の有限加群であることが示される。Gabber は、正標数であっても係数体をうまくとることにより、商体の拡大が分離代数拡大にできることを証明した。日本大学の下元数馬准教授との共同研究によって、その結果にエレメンタリーな証明を与えることに成功した。

体上の N-型の正規次数環が与えられると、正規射影多様体とその上の Q-因子があって、もともとの環はその切断環と一致することが知られており、その事実は Demazure construction と呼ばれている。荒井悠介氏、越前谷彩香氏との共同研究によって、その一般化として、Z^n-次数付きの Krull 環が、多重切断環に同型になるための必要十分条件を与えた。多重切断環は極小モデル問題において重要な役割を果たす環である。また、chamber を代数的に定義して、その性質を調べた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　5　件）

① C.-Y. Chan, 藏野和彦、The cone spanned by maximal Cohen-Macaulay modules and an application, 査読有、Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 939-964.
DOI:10.1090/tran/6457

② C.-Y. Chan, 藏野和彦、Hilbert-Kunz functions over rings regular in codimension one, 査読有、Comm. in Algebra 44 (2016), 141-163.
https://doi.org/10.1080/00927872.2014.974247

③ H. Dao, 藏野和彦、Boundary and shape of Cohen-Macaulay cone, 査読有、Math. Ann. 364 (2016), 713-736.
https://doi.org/10.1007/s00208-015-1231-y

④ 藏野和彦、下元数馬、An elementary proof of Cohen-Gabber theorem in the equal characteristic p > 0 case, 査読有、Tohoku Math. J. 70 (2018), 377-389.
https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1537495352

⑤ 荒井悠介、越前谷彩香、藏野和彦、Demazure construction for Z^n-graded Krull domains, 査読有、Acta Math. Vietnam 44 (2019), 173-205.
https://doi.org/10.1007/s40306-018-0281-0

〔学会発表〕（計　10　件）

① 藏野和彦、2015 年 12 月 15 日（火）、「On finite generation of symbolic Rees rings of space monomial curves」、研究集会「特異点と不変量」、京都大学数理解析研究所

② 藏野和彦、2016 年 3 月 18 日（金）、代数学賞受賞講演「局所環上の交点理論と Cohen-Macaulay 加群論への応用」、日本数学会年会、筑波大学

③ 藏野和彦、2016 年 3 月 21 日（月）、「A fan determined by a Z^n-graded domain and Z^n-graded Demazure construction」、International Conference and the 8th Japan-Vietnam joint Seminar on Commutative Algebra、Ha Long, Vietnam

④　<u>藏野和彦</u>、2016 年 5 月 2 日（月)、「準エクセレント環のイデアルアデック完備化に関する Gabber の仕事」、研究集会「Commutative Algebra Day in Tokyo」、東京大学数理科学研究科

⑤　<u>藏野和彦</u>、2016 年 10 月 3 日（月)、「Numerical equivalence and maximal Cohen-Macaulay modules」、The National Congress of Algebraic Geometry, CMO BIRS, Oaxaca（メキシコ）

⑥　<u>藏野和彦</u>、2017 年 3 月 7 日（木)、「Cox ring of blow-up of weighted projective space」コロキウム，ミズーリー大（アメリカ）

⑦　<u>藏野和彦</u>、2017 年 6 月 25 日（日)、「Modification による等標数での big Mac の構成と Serre の重複度予想」、可換環論と数論幾何の新展開～ホモロジカル予想を通じて～、名古屋大学

⑧　<u>藏野和彦</u>、2017 年 7 月 11 日（火)、「Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves」、The Prospects for Commutative Algebra, Osaka (ホテル日航大阪)

⑨　<u>藏野和彦</u>、2018 年 3 月 18 日（金)、「西村-西村-Gabber の定理について」、Commutative Algebra Day in Kyoto，京都教育大学

⑩　<u>藏野和彦</u>、2019 年 3 月 23 日（土）、「Rationality of the negative curves and finite generation of symbolic Rees rings」、Commutative Algebra and its Environs, 1147th AMS Meeting，University of Hawaii at Manoa（アメリカ）

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano/

６．研究組織

(1)研究分担者
なし

(2)研究協力者
なし