様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：　３２７０２
研究種目：　基盤研究(C)（一般）
研究期間：　2015～2017
課題番号：　１５Ｋ０４８２９

研究課題名（和文）有限体上の射影的代数幾何とその符号理論への応用

研究課題名（英文）Projective geometry over finite fields and its applications to coding theory

研究代表者
本間　正明（Homma, Masaaki）

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：８０１４５５２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の主要な成果は有限体上定義された射影空間内の超曲面上の有理点の個数に関するものである.
2015年度の当該助成事業として，研究を開始した時点で，我々は「elementary bound」と呼んでいる有理点の個数の上限を手にしていた. これは特異点を許容する限りでは最良であったが，非特異なものに限ればこれに類似した良い上限式が期待される. 本研究により，射影空間の次元が奇数の場合に，この問題に満足のいく解答を与えることができた.

研究成果の概要（英文）：This research project focused on the number of points of a hyper-surface in a certain projective space over a finite field.
In the previous project, we had shown, so-called, an `elementary bound' for hyper-surfaces of a fixed degree over a finite field in projective n-space, which is an upper bound of the number of rational points of hyper-surfaces without linear components, and, for n = 3, we had determined the all optimal surfaces in the sense of this bound.
In this project, we handled hyper-surfaces without singular points. For odd number n, we got an upper bound for the number of points of those hyper-surfaces, and settled the problem of finding all optimal hyper-surfaces in the sense of this bound.

研究分野：　代数幾何

キーワード：　有限体　射影空間　超曲面

１．研究開始当初の背景

（１）筆者は，ここ 10 年以上にわたって，有限体上定義された射影空間内の代数多様体の有理点の個数に興味を持って研究してきた．この個数が多いものは符号理論への応用が見込める事もあり，この分野の研究者数は世界的に見れば増加の一途である．筆者も有理点の個数の多いものにアプローチするため，その上限の良い評価を得ることに腐心し，2010 年の時点で Sziklai 予想を解決することにより，平面曲線（すなわち，2 次元射影空間内の曲線）の場合にはある程度の決着を見ていた．ここで，良い評価とは少なくともその評価を到達する例が存在し，かつある場合にはその評価を到達する物どもあるいは，その評価に近い物どもが分類できることを意味している．その後研究方向は，(a) 高次元射影空間内の超曲面の場合，および (b) 高次元射影空間内の曲線の場合の，および (c) 平面曲線の場合の精密化という三つに分岐した．

（２）以下，この成果報告書を叙述する上で必要最小限の記号を用意しておく．n 次元射影空間を $\mathbb{P}^n$ で表し，q を素数 p の冪 p^e とし，q 個の元からなる有限体を $\mathbb{F}_q$ とする．$\mathbb{P}^n$ の $\mathbb{F}_q$-点の個数は $q^n+q^{n-1}+\cdots+q+1$ であるが，この数を $\theta_q(n)$ と略記する．さらに，$\mathbb{F}_q$ 上定義された代数多様体 V の $\mathbb{F}_q$-点の個数を $N_q(V)$ で表す．したがって，$N_q(\mathbb{P}^n)=\theta_q(n)$ である．

（３）2015 年度の当該助成事業として，研究を開始した時点での筆者による成果の蓄積は次の通りであった．

(α) (Elementary Bound) $\mathbb{P}^n$ 内の $\mathbb{F}_q$-超平面を成分に持たない，次数 d の $\mathbb{F}_q$-超曲面 X について，

$$N_q(X) \leq (d-1)q^{n-1}+dq^{n-2}+\theta_q(n-3)$$

が成立し，$d=2, \sqrt{q}+1, q+1$ のときは等号を到達する例が存在する．[引用文献③]

(β) 上記で $n=3$ の場合，等号を到達するのは，$\mathbb{F}_q$-射影同値を除いて，

① $n=3, d=2$ のとき，X は $X_0X_1-X_2X_3=0$ で定まる曲面;

② $n=3,\ d=\sqrt{q}+1$ のとき， Hermitian surface

$$X_0^{\sqrt{q}+1}+X_1^{\sqrt{q}+1}+X_2^{\sqrt{q}+1}+X_3^{\sqrt{q}+1}=0;$$

③ $n=3, d=q+1$ のとき，

$$X_0^{q+1}+X_1^{q+1}+X_2^{q+1}+X_3^{q+1}=0$$

で定まる曲面
に限る．[引用文献②]

２．研究の目的

研究計画書に記した申請研究期間中に解決を目指した課題は以下の通りであった．

(1) 特異点を持つ Frobenius nonclassical 曲線の $\mathbb{F}_q$-有理点の個数・配置とその曲線から得られる符号の研究．これにより，Sziklai bound の等号を到達する場合の曲線の分類が完成が期待できる．
(2) 超曲面の $\mathbb{F}_q$-有理点の個数･配置とその Galois 点の研究．どれだけ平面曲線の場合と異なるのか，あるいは類似するのかを明らかにしたい．
(3) Hermitian 多様体の，その中に含まれる線形多様体の視点からの研究．良い符号が構成できる可能性がある．
(4) (標数 0 も含めて，)$\mathbb{P}^3$ 内の曲面上の直線の本数・配置についての研究．

しかし，研究期間の開始直後に Tironi [引用文献①]（の preprint version）が現れ，それに触発される形で上記 (2) の課題は見直すことになり，これが，この研究期間中の最大の業績となった．このようなダイナミクスが数学研究の面白いところである．

３．研究の方法

本研究も，今まで申請者が多くの研究を共にしてきた S. J. Kim との共同研究として立案された．比較的まとまった時間が取れる時期に韓国に Kim 教授を訪問し集中的に共同研究を行い，その他の時期はメールでのアイデア交換を行った．ただ，後者の方法では隔靴掻痒の感もあり，前者が主要な共同研究の方法となった．また，3 年前の成果報告書にも記したこではあるが，数学の研究においては，いつの時代でもアイデア・情報の交換が有効であった．かつては，特に西欧から離

れた日本では，文献や手紙と言う手段が多かったが，今や，これらはインターネットを通じて得られまたは発信することが多くなっている．しかし face-to-face での議論は informal ではあるが思いがけない効果を生じうる．実際，直接意見を交換する事により，文章では表現しにくい微妙な感触が伝わることを多々経験している．この意味で，機会を捉えて conference, symposium, workshop に参加し，あるいは，内外の関連研究者を招聘し議論することは有力な研究方法であり，効果的であった．

４．研究成果

ここでは，主要な研究成果である発表論文②について述べる．２節で述べたように，Tironi が，一般の $\mathbb{P}^n$ について，[引用文献②] の結果を一般化した．しかし，その分類に現れる超平面は本質的には，我々が $\mathbb{P}^3$ で行った分類を超えるものではなかった．彼の分類にあらわれた特異点のない超曲面は n が奇数，$d = q + 1$ の場合に限りそれらは $\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(X_{2i}^q X_{2i+1} - X_{2i} X_{2i+1}^q\right) = 0$ という，良く知られたものだけであった．特異点を許容して分類しても，これらに我々が $\mathbb{P}^3$ の中で決定した曲面の錐が付け加わるだけであった．したがって，特異点のない超曲面に限れば，“Elementary Bound”は改良されるべきであり，それが大きな課題として浮上してきた．

初等的な考察により，$\mathbb{P}^n$ 内の次数 $d \geq 2$ の非特異超曲面 X に含まれる線形部分空間の次元は高々 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ であることが分かる．これを念頭において，“Elementary Bound”を証明したときに類似する手法を用いると，n が奇数の場合には

$$N_q(X) \leq \theta_q\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left((d-1)q^{\frac{n-1}{2}} + 1\right)$$

である事が証明できた．さらに，この等号を到達するのは，

(i) $d = 2$ で X は 非特異双曲的２次超曲面，すなわち， X は $\mathbb{F}_q$ 上

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} X_{2i} X_{2i+1} = 0$$

に射影同値，あるいは

(ii) $q = p^e$, e は偶数で，$d = \sqrt{q} + 1$ であり，X は非特異 Hermitian 超曲面，すなわち，X は $\mathbb{F}_q$ 上

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(X_{2i}^{\sqrt{q}} X_{2i+1} + X_{2i} X_{2i+1}^{\sqrt{q}}\right) = 0$$

に射影同値，あるいは

(iii) $d = q + 1$ で X は 非特異な $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ を埋め尽くす超曲面，すなわち，X は $\mathbb{F}_q$ 上

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(X_{2i}^q X_{2i+1} - X_{2i} X_{2i+1}^q\right) = 0$$

に射影同値のいずれかである．

n が偶数の場合は状況はどうなっているのであろうか？ この場合も，上記「$\mathbb{P}^n$ 内の次数 $d \geq 2$ の非特異超曲面 X に含まれる線形部分空間の次元は高々 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ である」ということを念頭に置き「“Elementary Bound”を証明したときに類似する手法」を適用するとどうなるのであろうか？ この場合には

$$N_q(X) \leq \theta_q(\frac{n}{2}) q^{\frac{n}{2}-1}(d-1) + \theta_q(\frac{n}{2} - 1)$$

という不等式を得るのであるが，残念ながら，等号を到達する非特異超曲面は存在しないことが証明できる．種々の状況から，n が偶数の場合，

$$N_q(X) \leq \theta_q(\frac{n}{2} - 1)\left((d-1)q^{\frac{n}{2}} + 1\right)$$

なる不等式が成立するのではないかと予想しているが，これは今後の研究課題である．

最後に，その他の成果について若干言及しておく．残りの発表論文 ①, ③, ④ は，いずれも [引用文献 ④] の精密化を狙った当初の問題意識 (1) に関わる結果を論じている．①では次数のある程度大きな場合をイデアル論的な取り扱いで考察し，③では q が小さな場合を計算機の手を借りて考察し，④では 特異点を持つ Frobenius nonclassical 曲線を数え上げの手法を用いて考察した．

〈 引用文献 〉

① A. L. Tironi, Hypersurfaces achieving the Homma-Kim bound, Finite Fields Appl. 48 (2017), 103–116
DOI:10.1016/j.ffa.2017.06.015

② M. Homma and S. J. Kim, Number of points of surfaces in the projective 3-space over finite

fields, Finite Fields Appl. 35 (2015), 52–60
DOI:10.1016/j.ffa.2015.03.004

③ M. Homma and S. J. Kim, An elementary bound for the number of points of a hypersurface over a finite field Finite Fields Appl. 26 (2013), 76–83
DOI:10.1016/j.ffa.2012.11.002

④ M. Homma and S. J. Kim, Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field III, Finite Fields Appl. 16 (2010) 315–319
DOI:10.1016/j.ffa.2010.05.001

５．主な発表論文等

[雑誌論文]（計 4 件）

① Homma, Masaaki; Kim, Seon Jeong: The second largest number of points on plane curves over finite fields. Finite Fields Appl. 49 (2018), 80–93. 査読有り
DOI: 10.1016/j.ffa.2017.09.007

② Homma, Masaaki; Kim, Seon Jeong: Number of points of a nonsingular hypersurface in an odd-dimensional projective space. Finite Fields Appl. 48 (2017), 395–419. 査読有り
DOI: 10.1016/j.ffa.2017.08.011

③ Cheon, Eun Ju; Homma, Masaaki; Kim, Seon Jeong; Lee, Namyong: On a number of rational points on a plane curve of low degree. Discrete Math. 340 (2017), no. 6, 1327–1334. 査読有り
DOI: 10.1016/j.disc.2017.01.017

④ Borges, Herivelto; Homma, Masaaki: Points on singular Frobenius nonclassical curves. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 48 (2017), no. 1, 93–101. 査読有り
DOI: 10.1007/s00574-016-0008-6

[学会発表]（計 2 件）

① Homma, Masaaki: A bound for the number of lines lying on a non-singular surface in 3-space over a finite field, International Workshop on the arithmetic of finite fields, 2016 年 7 月 15 日, Ghent, Belgium

② Homma, Masaaki: An analogue of a Theorem of Tallini on plane curves over finite fields, AGCT, 2015 年 5 月 18 日, CIRM, France

６．研究組織

(1) 研究代表者

本間　正明　(HOMMA Masaaki)
神奈川大学・理学部・教授
研究者番号：８０１４５５２３