

令和元年6月20日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04832

研究課題名(和文) 同変K理論におけるシューベルト・カルキュラス

研究課題名(英文) Schubert calculus in equivariant K-theory

研究代表者

池田 岳 (Ikeda, Takeshi)

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：40309539

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：古典型グラスマン多様体の同変K理論のシューベルト類に対して、行列式、パフフィアンとして表す公式を得た。GP関数に関して、set-valued decomposition tableaux と呼ばれる組合せ論的对象を導入し、構造定数の予想を立て、ピエリ規則を証明した。K理論的Peterson同型を証明した。極大等方グラスマン多様体の量子同変コホモロジー環において factorial Q-, P-関数がシューベルト類を代表することを示した。直交極大グラスマン多様体の同変ピエリ公式を証明した。成瀬宏はKirillovと共同で古典型旗多様体の同変K理論のシューベルト類と同一視される関数族を導入した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

等方グラスマン多様体の種々のコホモロジー理論において、シューベルト類の具体的な記述を与えた。特に同変K理論、同変コホモロジー、量子同変コホモロジーなどである。特に、行列式、パフフィアン公式は数十年来の懸案を解決した。構造定数に関してひとつの予想を立てた。これは組合せ論に新しい概念の導入を含む。その予想に対して、部分的、肯定的解決を与えた。また、K理論における量子・アフィン対応を証明した。

研究成果の概要(英文)：We obtained determinant and Pfaffian(sum) formulae for the Schubert classes in the equivariant K-theory of classical type A, B, and C Grassmannians (with Hudson, Matsumura, Naruse). Related to the GP functions which are identified with the Schubert classes of maximal orthogonal Grassmannians, we introduced a combinatorial notion called set-valued decomposition tableaux, and gave a conjecture on the structure constant, and gave a proof for special case called Pieri case (with Cho, Nakasuji). We formulated K-theoretic Peterson isomorphism and proved it (with Iwao, Maeno). In the equivariant quantum cohomology ring, we proved the factorial P- and Q-functions represent the Schubert classes (with Mihalcea, Naruse). For the maximal orthogonal Grassmannian, we proved the Pieri rule in the equivariant cohomology (with Cho). Naruse joint with Kirillov introduced a family of functions that are identified with Schubert classes in the equivariant K-theory of the classical flag variety.

研究分野：代数学, 組合せ論

キーワード：K理論 シューベルト類 グラスマン多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

一般旗多様体の同変  $K$  理論において, シューベルト基底に関する構造定数を決定する問題はグラスマン多様体を除いてほとんど解かれていなかった.

2. 研究の目的

同変  $K$  理論的シューベルト構造定数の決定のため, シューベルト多項式の理論を展開し, 問題に迫る. それと関連して新たな組合せ的对象も見出し, それを探求する.

3. 研究の方法

特殊多項式論を展開し, それと関連する組合せ論を深めて問題に迫る.

4. 研究成果

古典型グラスマン多様体の同変  $K$  理論のシューベルト類に対して, 行列式, パフフィアンとして表す公式を得た.  $GP$  関数に関して, set-valued decomposition tableaux と呼ばれる組合せ論的对象を導入し, 構造定数の予想を立て, ピエリ規則を証明した.  $K$  理論的 Peterson 同型を証明した. 極大等方グラスマン多様体の量子同変コホモロジー環において factorial  $Q$ -,  $P$ -関数がシューベルト類を代表することを示した. 直交極大グラスマン多様体の同変ピエリ公式を証明した. 成瀬宏は Kirillov と共同で古典型旗多様体の同変  $K$  理論のシューベルト類と同一視される関数族を導入した.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計8件)

1. “ Multiplicities of Schubert varieties in the symplectic flag variety ”, Dave Anderson, Takeshi Ikeda, Minyoung Jeon, Ryotaro Kawago, Proceedings of the 31st Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Ljubljana) pp.12, 2019
2. “Peterson Isomorphism in  $K$ -theory and Relativistic Toda Lattice”, Takeshi Ikeda, Shinsuke Iwao, and Toshiaki Maeno, Int. Math. Res. Notices, rny051, pp.1--42, 2018.3.
3. “ Pieri rule for the factorial Schur  $P$ -functions ”, Soojin Cho and Takeshi Ikeda, Schubert varieties, equivariant cohomology and characteristic classes IMPANGA 15, pp. 25-48, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2018.2.
4. “Degeneracy loci classes in  $K$ -theory --- determinantal and Pfaffian formula ”, Thomas Hudson, Takeshi Ikeda, Tomoo Matsumura, Hiroshi Naruse, Adv. Math. **320**, pp.115--156, 2017.11.
5. “Construction of Double Grothendieck Polynomials of Classical Types using IdCoxeter Algebras ”, Anatol Kirillov, Hiroshi Naruse, Tokyo J. Math. **39**, Number 3 (2017), 695-728.
6. “ Factorial  $P$ - and  $Q$ -Schur functions represent equivariant quantum Schubert classes ”, Takeshi Ikeda, Leonardo Mihalea, and Hiroshi Naruse, Osaka J. Math. **53**, no. 3, pp. 591--619, 2016.7.
7. “ Lectures on equivariant Schubert polynomials, Takeshi Ikeda, Adv. Stud. Pure Math., **71**, pp. 97--137, Math. Soc. Japan, 2015.9
8. “ Equivariant Giambelli formula for the symplectic Grassmannians --- Pfaffian sum formula ”, Takeshi Ikeda and Tomoo Matsumura, Proceedings of FPSAC 2015, pp.309--320, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2015.

[学会発表](計 25 件)

1. Set-valued decomposition tableaux(英語) ” 2019-3-25, Crystals and Their Generalizations ( 大阪市立大学 )
2. “ Schubert calculus of Isotropic Grassmannians(英語) ” 2019-3-11, Seminar (Sun Yat-sen university, Guangzhou, China)
3. “ Relativistic Toda lattice and  $K$ -theoretic Peterson isomorphism(英語) ” 2019-1-19, Rikkyo MathPhys 2019, 立教大学
4. “ シューベルト多様体の特異点の重複度に関する予想 ” 2018-12-21 ( 川合遼太郎と共同 ) セミナー , 岡山大学理学部 2 号館 D401
5. “  $K$ -theoretic Peterson isomorphism and its applications(英語) ” 2018-12-12, Hessenberg 集会 2018 in Osaka ( 大阪市立大学 )
6. “ Relativistic Toda lattice and  $K$ -theoretic Peterson isomorphism(英語) ” 2018-11-8, Quantum  $K$ -theory and related topics, Korea Institute for Advanced Study
7. “  $K$ -theory Schubert calculus of the maximal orthogonal Grassmannian and set-valued decomposition tableaux(英語) ” 2018-10-25, Geometry, Combinatorics and Integral Systems Seminar ( Ohio State University )
8. “  $K$ -theory Schubert calculus of the maximal orthogonal Grassmannian and set-valued decomposition tableaux(英語) ” 2018-10-22, Algebra Seminar ( Virginia Tech )
9. “  $K$  理論的 Peterson 同型 ” 2018-9-24, 岡山大学 無限可積分系セッション特別講演
10. “ A Peterson isomorphism from integrable systems(英語) ” 2017-11-10, International Conference on the trends in Schubert calculus, Sun Yat-sen University, Guangzhou, China
11. “ Peterson Isomorphism in  $K$ -theory and Relativistic Toda Lattice(英語) ” 2017-9-27, NCTS Seminar in Algebraic Geometry, Taiwan National University
12. “ Quantum  $K$ -theory of flag variety and  $K$ -homology of affine Grassmannian(英語) ” 2016-10-12, Geometric Representation Theory, Kyoto University
13. “ The Zoo of symmetric functions arising in  $K$ -theory Schubert calculus(英語) ” 2016-8-31, Infinite Analysis 2016 Summer school, Nagoya University
14. “ Kempf-Laksov-Damon determinant formula in  $K$ -theory(英語) ” 2016-8-17 , Colloquium talk at Chennai Mathematical Institute , Chennai Mathematical Institute
15. “  $K$ -theory analogues of Schur ’ s  $P$ - and  $Q$ -functions(英語) ” 2016-8-16, Combinatorics and Representation Theory Seminar, The Institute of Mathematical Sciences, Chennai

16. “ Double Grothendieck polynomials and the Kempf-Laksov resolutions(英語) ” 2016-4-30, Workshop on Equivariant generalized Schubert calculus and its applications, University of Ottawa
17. “ Degeneracy loci formulae in  $K$ -theory of Grassmann bundles(英語) ” 2016-3-28, Algebra Seminar, Virginia Tech University
18. “ On double Grothendieck polynomials of classical types(英語) ” 2016-3-25, Combinatorics Seminar, University of Minnesota
19. “ 階乗型  $P$  関数の構造定数について ” 2016-3-19, 日本数学会2016年度年会 筑波大学
20. “ Schur  $Q$  関数の一般化と Schubert 幾何 ” 2016-2-17, 第11回代数・解析・幾何学セミナー, 鹿児島大学理学部
21. “ Degeneracy loci formulas in  $K$ -theory of the symplectic Grassmannian bundles(英語) ” 2015-12-8, Shanghai Conference on Representation Theory, Tian He Hotel, Chongming Island, Shanghai, China
22. “ Equivariant Littlewood-Richardson rule of isotropic Grassmannians ” 2015-11-17, 表現論シンポジウム, おおとり荘 (静岡県伊豆の国市古奈 1 1 3 3 )
23. “ シンプレクティック・ベクトル束の  $K$  理論的退化跡 ” 2015-9-13, 池田岳, 松村朝雄, 成瀬弘, Thomas Hudson, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学
24. “ シンプレクティック・グラスマン多様体の同変Schubert 類に対するPfaffian 和公式 ” 2015-9-13, 池田岳, 松村朝雄, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学
25. “ シューア関数の仲間とグラスマン多様体 ” 2015-8-20, 「可積分系理論の諸分野への応用」数理解析研究所

〔図書〕(計 1 件)

1. 数え上げ幾何学講義 ---シューベルト・カリキュラス入門  
池田岳 東京大学出版会 2018.8

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：成瀬宏  
ローマ字氏名：Naruse Hiroshi  
所属研究機関名：山梨大学  
部局名：大学院総合研究部  
職名：教授  
研究者番号（8桁）：20172596

(2)研究協力者

研究協力者氏名：中筋麻貴  
ローマ字氏名：Nakasuji Maki  
  
研究協力者氏名：松村朝雄  
ローマ字氏名：Matsumura Tomoo

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。