

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04835

研究課題名(和文) 対称空間の対蹠集合の拡張と応用

研究課題名(英文) Extension and application of antipodal sets in symmetric spaces

研究代表者

田崎 博之 (TASAKI, Hiroyuki)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：30179684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：古典型コンパクトLie群の商群の極大対蹠部分群の分類を得た。この成果を利用して古典型コンパクトLie環の自己同型群の極大対蹠部分群も分類した。複素旗多様体の二つの実形の離散的交叉が対蹠集合になることを示し、これを利用して二つの実形のLagrangian Floerホモロジーを決定した。これはコンパクト型Hermitian対称空間の実形の交叉に関する以前の成果の一般化である。有向実Grassmann多様体の極大対蹠集合に組合せ論的対象を対応させ、これを利用して階数5の対蹠集合の濃度を評価した。さらに基本的な極大対蹠集合の系列を構成し、これによって今までに得た極大対蹠集合の系列を再構成した。

研究成果の概要(英文)：We classified maximal antipodal subgroups in the quotient groups of classical compact Lie groups. By the use of these results we also classified maximal antipodal subgroups in the automorphism groups of classical compact Lie algebras. We showed that the discrete intersection of two real forms in a complex flag manifold is an antipodal set and using this we determined the Lagrangian Floer homology for two real forms. This is a generalization of our previous results on the intersections of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type. We associated maximal antipodal sets in real oriented Grassmann manifolds with certain combinatorial objects. Using this we estimated the cardinalities of antipodal sets of rank 5 and constructed some sequences of maximal antipodal sets of general rank. We found some fundamental sequences with which we can reconstruct maximal antipodal sets we have already found.

研究分野：微分幾何学

キーワード：対称空間 対蹠集合 実形の交叉 複素旗多様体 有向実Grassmann多様体 対称三対

1. 研究開始当初の背景

科学研究費 基盤(C)「対称空間の対蹠集合の拡張と応用」(2015年度～2017年度)による研究成果から、対称空間の対蹠集合の概念およびその複素旗多様体の場合への拡張が、実形の交叉の記述に役立つこと、および対蹠集合の基本的性質が明らかになってきたことから、本研究に着手した。

2. 研究の目的

本研究の研究目的は以下の3項目である。

I. 対称空間内の対蹠集合の性質と二つの鏡映部分多様体の交叉の対蹠性を解明する。さらにこれらを利用して鏡映部分多様体による交叉積分公式の精密化を行う。

II. 複素旗多様体に拡張された対蹠集合の概念を使って、複素旗多様体内の二つの実形の交叉の対蹠性を解明し、二つの実形に関する Floer ホモロジーへ応用する。

III. 有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合を具体的に与え、他の幾何学の問題、たとえば有限幾何学特に有限射影幾何学、交代形式の標準形を有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合によって記述することや有向実 Grassmann 多様体の位相などとの関連性を調べる。

3. 研究の方法

研究目的の I. と II. は一つのコンパクト Lie 群から定まる二つの対称対さらには対称三対と密接に関係している。そこで二つの対称対または対称三対を利用してコンパクト対称空間内の二つ鏡映部分多様体の交叉および複素旗多様体内の二つの実形の交叉の対蹠性を解明する。また交叉の対蹠性に関する情報から Floer ホモロジーを具体的に記述する。コンパクト対称空間の多くはコンパクト Lie 群に極地として埋め込むことができ、これを利用してコンパクト対称空間の対蹠集合の性質をコンパクト Lie 群の対蹠集合の性質に帰着させて詳しく性質を調べる。

研究目的の III. は組合せ論の手法も利用して研究を進める。実ベクトル空間の交代形式は有向実 Grassmann 多様体の関数とみなすことができ、Morse 関数の理論を適用して交代形式と有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合の関連性を解明しする。その応用として交代形式の標準形を決定する。

4. 研究成果

この後の論文リストの論文 5, 6 やこれらの前の論文で解明したコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉に関する研究は一段落がついた。これに続く研究として次の二つの方向を考えた。一つはコンパクト型 Hermite 対称空間をコンパクト Lie 群の随伴軌道という観点から複素旗多様体に拡張して、そこでの二つの実形の交叉にこれまでの研究成果を拡張することである。この方向の研究はすでに始めていて、論文 1 で基本事項をまとめ

たが、その後も研究は進展し、複素旗多様体内の二つの実形を定める対称的自己同型写像が可換の場合は、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の交叉に関する研究成果をおおむね拡張できた。これらの研究成果をまとめた論文を現在執筆中である。もうひとつの研究の方向はコンパクト対称空間内の二つの鏡映部分多様体の交叉を対蹠集合の観点から調べることである。この研究を進めるためには、対称 R 空間とは限らない一般のコンパクト対称空間の対蹠集合の情報が少ないため、コンパクト対称空間の対蹠集合自身をまず研究対象にした。まずコンパクト Lie 群の場合を扱い、一般のコンパクト対称空間はコンパクト Lie 群に埋め込んで対蹠集合の性質を調べるという二段階で研究を行うことにした。コンパクト Lie 群の極大対蹠集合は部分群の場合を調べればよいことがわかり、古典型の場合は極大対蹠部分群の分類を田中真紀子氏との共同研究で得た。その成果は論文 2 にまとめて発表した。この結果から古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類も得られ、成果を論文 3 で発表した。一般のコンパクト対称空間をコンパクト Lie 群に埋め込んでコンパクト対称空間の対蹠集合の性質をコンパクト Lie 群の対蹠集合の性質に帰着させることができる。この方針で多くのコンパクト対称空間の対蹠集合の性質が明らかになってきた。

有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合は組合せ論的对象に対応することを示して以降、この研究は有限集合のある性質を持つ部分集合の族の研究に帰着した。これまでに階数 4 以下の場合の分類を完成させたが、階数が高い場合にはまだ分類の完成には至っていない。そこで、対蹠集合の濃度の評価を問題にして、ある種の対蹠集合の濃度の評価を得て論文 7 で発表した。さらにこれまでの議論を参考にして新たな極大対蹠集合の系列の構成方法を得た。この結果は論文 4 で発表した。今後はこれまでの系列を構成する方法が階数が高い場合にも適用できるかどうかが課題になる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

1 H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 査読有(掲載決定)

2 M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, *Journal of Lie Theory*, 27 (2017), No. 3, 801-829

3 M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of the

automorphism groups of compact Lie algebras, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 203, Y.J. Suh et al. (eds.), "Hermitian-Grassmannian Submanifolds", (2017), 39-47

4 H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 203, Y.J. Suh et al. (eds.), "Hermitian-Grassmannian Submanifolds", (2017), 17-26

5 M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type", J. Math. Soc. Japan Vol.67, No.3 (2015), 1161-1168

6 O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads, International Journal of Mathematics 26 no.5 (2015), 1541005-1-32

7 H. Tasaki, Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, International Journal of Mathematics 26 no.5 (2015), 1541008-1-12

[学会発表](計 43 件)

1 酒井高司, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, Geometry of Submanifolds and Integrable Systems, 2018年3月日, 大阪市立大学数学研究所(大阪府大阪市)

2 酒井高司, 複素旗多様体内の二つの実形の Floer ホモロジー, 日本数学会 2018 年度年会, 2018年320日, 月東京大学駒場キャンパス(東京都目黒区)

3 田崎博之, 有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合の織り方, 微分幾何学セミナー, 2018年2月16日, 大阪市立大学数学研究所(大阪府大阪市)

4 田崎博之, 有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合の織り方, 第7回水戸幾何セミナー, 2018年2月13日, 茨城大学理学部(茨城県水戸市)

5 田中真紀子, Maximal antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces, Oberseminar Differentialgeometrie, 2017年10月5日, Universitat Augsburg(Germany)

6 田崎博之, 有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合(1)(2), 広島幾何学研究集会 2017, 2017年10月5日, 広島大学(広島県東広島市)

7 田中真紀子, コンパクト型 Riemann 対称空間の極大対蹠集合, 研究集会「対称空間論とその周辺」, 2017年9月9日, つくばイノベ

ーションプラザ(茨城県つくば市)

8 田崎博之, 有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合, 研究集会「対称空間論とその周辺」, 2017年9月9日, つくばイノベーションプラザ(茨城県つくば市)

9 保倉理美, コンパクト例外群 G_2 の初等的実現について, 研究集会「対称空間論とその周辺」, 2017年9月9日, つくばイノベーションプラザ(茨城県つくば市)

10 酒井高司, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, 2017 Korean Mathematical Society Spring Meeting, 2017年4月29日, Chosun University(Korea)

11 田中真紀子, Maximal antipodal sets of the bottom space of $Sp(n)/U(n)$, The 13-th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory, 2017年3月30日, 大阪市立大学数学研究所(大阪府大阪市)

12 田崎博之, 有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合の系列, 日本数学会 2017 年度年会, 2017年3月26日, 首都大学東京(東京都八王子市)

13 田崎博之, 有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合, 北九州ワークショップ「幾何学と組合せ論」, 2017年3月11日, リファレンス小倉魚町貸会議室(福岡県北九州市)

14 田崎博之, 実形の交叉, 第24回沼津研究会, 2017年3月6日, 沼津工業高等専門学校(静岡県沼津市)

15 田崎博之, 古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群, 筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 2017年2月21日, 筑波大学(茨城県つくば市)

16 酒井高司, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, The First Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry, 2016年12月13日, 早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都新宿区)

17 保倉理美, 例外型コンパクト Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群, 部分多様体論・湯沢 2016, 2016年12月1日, 湯沢グランドホテル(新潟県南魚沼郡)

18 田中真紀子, 田崎博之, 保倉理美, 例外型コンパクト Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016年9月17日, 関西大学(大阪府吹田市)

19 田中真紀子, 田崎博之, 古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016年9月17日, 関西大学(大阪府吹田市)

20 入江博, 複素旗多様体の実形の交叉と Floer ホモロジーへの応用 - 合同な実形の場合 -, 部分多様体幾何とリー群作用 2016, 2016年9月1日, 東京理科大学森戸記念館(東京都新宿区)

21 田崎博之, コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群, 第63回幾何学シンポジウム, 2016

年 8 月 28 日, 岡山大学(岡山県岡山市)
22 田中真紀子, Maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact Lie algebras, International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds, 2016 年 7 月 28 日, Kyungpook National University(Korea)
23 田崎博之, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds II, International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds, 2016 年 7 月 28 日, Kyungpook National University(Korea)
24 田中真紀子, Antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces, The 11th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifolds and Lie Theory, 2016 年 3 月 22 日, 大阪市立大学数学研究所(大阪府大阪市)
25 田崎博之, Maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds, OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifolds and Lie Theory, 2016 年 3 月 22 日, 大阪市立大学数学研究所(大阪府大阪市)
26 田中真紀子, 田崎博之, コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群 II, 日本数学会 2016 年度年会, 2016 年 3 月 16 日, 筑波大学(茨城県つくば市)
27 酒井高司, ラグランジュ交叉と対蹠集合, Aspects of Differential Geometry ---宮岡礼子先生退職記念研究会-, 2016 年 3 月 9 日, 東北大学(宮城県仙台市)
28 田崎博之, 対称空間の対蹠集合に関連する代数的対象, 九大代数学セミナー, 2016 年 3 月 4 日, 九州大学伊都キャンパス(福岡県福岡市)
29 田崎博之, 対蹠集合と実形の交叉, 第 11 回代数・解析・幾何学セミナー, 2016 年 2 月 16 日, 鹿児島大学理学部(鹿児島県鹿児島市)
30 田崎博之, Maximal antipodal subgroups in the automorphism groups of compact Lie algebras, One-day Workshop on "Submanifolds in Symmetric Spaces", 2016 年 1 月 22 日, 首都大学東京(東京都八王子市)
31 奥田隆幸, 複素旗多様体の二つの実旗多様体の交叉, 広島大学合宿セミナー, 2015 年 12 月 18 日, ツネイシしまなみビレッジ(広島県福山市)
32 田中真紀子, コンパクト対称空間の対蹠集合, 大阪市立大学談話会, 2015 年 12 月 16 日, 大阪市立大学学数学研究所(大阪府大阪市)
33 酒井高司, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, 第 42 回変換群論シンポジウム, 2015 年 11 月 27 日, 金沢勤労者プラザ(石川県金沢市)
34 田崎博之, Maximal antipodal subgroups

of compact Lie groups, 部分多様体論・湯沢 2015, 2015 年 11 月 19 日, 湯沢グランドホテル(新潟県南魚沼郡)
35 酒井高司, Antipodal structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold II, The 19th International Workshop on Differential Geometry, 2015 年 10 月 26 日, NIMS, Daejeon, (Korea)
36 酒井高司, The geometry of orbits of Hermann actions and its applications, Seminars, 2015 年 10 月 23 日, KIAS(Korea)
37 田中真紀子, 田崎博之, コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大学(京都府京都市)
38 田崎博之, コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2015」, 2015 年 9 月 8 日, 東京理科大学森戸記念館(東京都新宿区)
39 田崎博之, 対称空間の対蹠集合, 第 62 回幾何学シンポジウム, 2015 年 8 月 30 日, 東京理科大学神楽坂キャンパス(東京都新宿区)
40 奥田隆幸, 複素旗多様体内の二つの実形の交叉, 第 62 回幾何学シンポジウム, 2015 年 8 月 30 日, 東京理科大学神楽坂キャンパス(東京都新宿区)
41 田崎博之, A 型コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群, RIMS 研究集会「部分多様体論と種々の幾何構造」, 2015 年 6 月 23 日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)
42 田中真紀子, Antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces, 2015 Joint Workshop: Geometry and Analysis, 2015 年 5 月 14 日, 東京理科大学野田キャンパス(千葉県野田市)
43 田崎博之, コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉 III, 筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 2015 年 4 月 14 日, 筑波大学(茨城県つくば市)

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.tsukuba.ac.jp/~tasaki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田崎 博之 (TASAKI HIROYUKI)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：30179684

(2) 連携研究者

田中 真紀子 (TANAKA MAKIKO)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：20255623

井川 治 (IKAWA OSAMU)

京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授

研究者番号：60249745

入江 博 (IRIYEH HIROSHI)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：30385489

酒井 高司 (AKAI TAKASHI)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号：30381445

奥田 隆幸 (OKUDA TAKAYUKI)
広島大学・理学研究科・講師
研究者番号：40725131