

平成30年6月5日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04836

研究課題名(和文) 球面内の平坦トーラスに関する直径予想の研究

研究課題名(英文) Studies on diameter conjecture on flat tori in the unit sphere

研究代表者

北川 義久 (Kitagawa, Yoshihisa)

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：20144917

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：「3次元単位球面内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスの外的直径は円周率に等しいであろう」という直径予想について研究した。この予想を証明するには、「2次元単位球面上のある種の閉曲線対 (c_1, c_2) について、 c_1 と c_2 の自己交点数がともに奇数であれば、 c_1 と c_2 は第2種の2重接触を持つであろう」という2重接触予想を証明すれば十分であることが知られており、本研究では、主に2重接触予想について研究した。その結果、もし c_1 が negative shell を含めば、2重接触予想は正しいことを証明した。

研究成果の概要(英文)：Diameter conjecture on flat tori in the unit 3-sphere states that the extrinsic diameter of isometrically immersed flat tori in the unit 3-sphere is equal to π . To prove this conjecture, it is sufficient to prove bi-tangent conjecture on periodic admissible pairs (c_1, c_2) in the unit 2-sphere, which states that if the self-intersection numbers of the closed curves c_1 and c_2 are odd, then c_1 and c_2 have a bi-tangent of the second kind. In this research, we study bi-tangent conjecture on periodic admissible pairs (c_1, c_2) , and we proved that the conjecture is true if the curve c_1 contains an negative shell.

研究分野：数学(幾何学)

キーワード：微分幾何 部分多様体 平坦トーラス 3次元球面 直径 剛性 正則閉曲線 2重接触

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究開始までの経緯.

1975年、「3次元単位球面 S^3 内の平坦トーラスを分類せよ」という問題が S.T.Yau [9] により提起された。 S^3 内の平坦トーラスとは、 S^3 内にはめ込まれた2次元トーラスであって S^3 から誘導されるリーマン計量の曲率が0であるものをいう。当時、このようなトーラスの例として、Clifford トーラスや Hopf トーラスが知られていたが、これ以外の例があるかどうかは不明であった ([8])。

研究代表者は、1980年代後半、 S^3 の群構造および Hopf 写像を用いて、2次元単位球面 S^2 上の admissible な閉曲線対から S^3 内の平坦トーラスを構成する方法を開発し、この構成法を用いて、 S^3 内の平坦トーラスの新しい例を構成した。ただし、曲線対 (c_1, c_2) が admissible とは、 c_1 の測地曲率が c_2 の測地曲率より大きいことをいう。さらに、 S^3 内の平坦トーラスはすべてこの方法で構成できることを示し、Yau が提起した問題を解決した ([3])。

これ以後、この構成法を応用した研究成果が数多く得られている。例えば、研究代表者は、 S^3 内の結び目の Arf 不変量と上記の構成法を用いて、次の定理を証明した。

定理1 ([4])。 S^3 内に等長的に埋め込まれた平坦トーラスは S^3 の対蹠写像で不変である。

さらに、研究代表者は榎本一之氏および J.L.Weiner 氏との共同研究を実施し、定理1の応用として、 S^3 内の Clifford トーラスの剛性に関する次の定理を証明した。

定理2 ([2])。 M を S^3 内の Clifford トーラスとし、 f を M から S^3 への等長埋め込みとすると、 f は M から S^3 への包含写像と合同である。

以上のように、上述の構成法の発見以降、 S^3 内の平坦トーラスの研究は Lie 群論や結び目理論等との関係を深めながら大きく発展した。また、これらの研究成果は国外の研究者達の注目を集め、定理1が発表された数年後、Dadok-Sha [1] により、定理1の別証明が発表された。なお、 S^3 内の平坦トーラスに関するこれまでの研究成果については論説 [5] にまとめられている。

(2) 研究開始当初の状況.

本研究の開始当初、定理2における仮定「等長埋め込み」を、より弱い仮定「等長はめ込み」に置き換えることが可能かどうかという興味深い問題が残されていた。この問題は、 S^3 内の平坦トーラスに関する予想「 S^3 内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスの外的直径は常に円周率に等しい」と

密接な関係があり、この予想(直径予想と呼ばれる)が肯定的に解決できれば、「等長はめ込み」という弱い仮定の下で定理2の結論が得られることが知られていた ([2])。また、直径予想は次の予想と同値であることも知られていた。

2重接触予想: S^2 上の admissible な閉曲線対 (c_1, c_2) について、 c_1 と c_2 の自己交点数がともに奇数であれば、 c_1 と c_2 は第2種の2重接触を持つ。

さらに、2重接触予想はある条件の下で正しいことが示され、その結果、直径予想について次の定理が得られていた。

定理3 ([6, 7])。 M を平坦トーラスとし、 f を M から S^3 への等長はめ込みとする。もし f の平均曲率が「非負または非正」ならば、 f に関する直径予想は正しい。

しかし、完全解決には至らず、依然として直径予想の解決が重要課題として残されていた。

一方、これまでに得られた S^3 内の平坦トーラスに関する諸定理について、その高次元化の問題は、ほとんどが未解決であった。理由は、 n が3以上の場合、 $(2n-1)$ 次元単位球面内の n 次元平坦トーラスの完全な構成法が発見されていないからであり、 $(2n-1)$ 次元単位球面内の n 次元平坦トーラスの構成法の研究も重要課題として残されていた。この課題は、複素射影空間 $CP^{(n-1)}$ 内のラグランジュ平坦トーラスの構成法の研究と密接に関係している。実際、 $CP^{(n-1)}$ 内のラグランジュ平坦トーラスの Hopf 写像による逆像は $S^{(2n-1)}$ 内の n 次元平坦トーラスであり、複素射影空間 $CP^{(n-1)}$ 内のラグランジュ平坦トーラスの構成法の研究も重要な研究課題であった。

(3) 参考文献

- [1] J.Dadok, J.Sha, On embedded flat surfaces in S^3 , J. Geometric Analysis 7(1997), 47-55.
- [2] K.Enomoto, Y.Kitagawa and J.L.Weiner, A rigidity theorem for the Clifford tori in S^3 , Proc. A.M.S. 124(1996), 265-268.
- [3] Y.Kitagawa, Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3 , J. Math. Soc. Japan, 40(1988), 457-476.
- [4] Y.Kitagawa, Embedded flat tori in the unit 3-sphere, J. Math. Soc. Japan, 47(1995), 275-296.
- [5] 北川義久, 3次元球面内の平坦トーラス, 数学, 57巻2号(2005), 113-126.
- [6] Y.Kitagawa and M.Umehara, Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3 , Geometriae Dedicata, 155(2011), 105-140.
- [7] Y.Kitagawa and M.Umehara, Erratum

to:Extrinsic diameter of immersed flat tori in S^3 , *Geometriae Dedicata*, 171(2014), 407-412.

[8] M.Spivak, Some left-over problems from classical differential geometry, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 27(1975), 245-252.

[9] S.T.Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, *Amer. J. Math.*, 97(1975), 76-100.

2. 研究の目的

前述の二つの課題を解決するため、研究目的を以下のように設定した。

研究目的 A. 2重接触予想を解決することにより直径予想を完全解決する。

研究目的 B. CP^n 内のラグランジュ平坦トーラスの構成法を研究するための準備として、2次元複素射影空間 CP^2 内のラグランジュ平坦トーラスの構成法を開発する。

3. 研究の方法

研究目的を達成するため、以下のような研究計画を立てた。

研究計画 A (研究目的 A を達成するための計画)

(A-1) 直径予想と S^2 上の閉曲線対の2重接触問題の同値性を確認する。

(A-2) 閉曲線対の変形理論(都合のよい変形が存在することを保証する)を作る。

(A-3) 上記の変形理論を用いて、2重接触問題を簡単な場合に帰着させ、2重接触予想を解決する。

研究計画 B (研究目的 B を達成するための計画)

(B-1) CP^2 内のラグランジュ平坦曲面の構造方程式を確認する。

(B-2) 上記の偏微分方程式の解を構成する方法を確立する。

(B-3) 上記の解の2重周期性について研究し、 CP^2 内のラグランジュ平坦トーラスを構成する。

研究計画 A を遂行するには、 S^2 上の shell と呼ばれる図形に関する理論を用いることが有効である。研究代表者は、この理論に精通している連携研究者(梅原雅顕)と共同研究を実施した。また、研究計画 B を遂行するために、複素射影空間に値を持つ写像の研究に精通している連携研究者(相原義弘)と共同研究を実施した。

具体的には、各年度に数回、研究代表者と連携研究者によるセミナーを実施し、課題解決のための討論を行った。また、研究代表者は国内で開催される微分幾何学関連の研究集会に参加し、他の研究機関に所属する幾何学者達との交流を深め、研究計画の遂行に必

要な情報を収集した。さらに、年度後半に、研究代表者と連携研究者は研究打合せを行い、それまでに得られた情報を共有するとともに研究計画を推進するためのアイデアについて検討した。

4. 研究成果

現在、論文準備中であるため未発表であるが、2重接触予想について、次の定理を証明した。

定理. (c_1, c_2) を2次元単位球面 S^2 上の admissible な閉曲線対とし、 c_1 と c_2 の自己交点数はともに奇数とする。もし c_1 が negative shell を持てば、 c_1 と c_2 は第2種の2重接触を持つ。特に、 c_1 の自己交点数が1であれば、閉曲線対 (c_1, c_2) に対する2重接触予想は正しい。

なお、この定理を証明するために準備したいくつかの命題は、2重接触予想を完全解決するための重要な役割を果たすことが期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space, *Osaka J. Math.* 54 (2017), 249-272, 査読有

A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara and Kotaro Yamada, Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times, *Diff. Geom. and its Appl.* 52 (2017), 64-77, 査読有

N. Ando, T. Fujiyama and M. Umehara, CP^1 -umbilics with arbitrarily high indices, *Pacific Journal of Math.* 288 (2017) [dx.doi.org/10.2140/pjm.2017.288.1](https://doi.org/10.2140/pjm.2017.288.1), 査読有

K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, An index formula for a bundle homomorphism of the tangent bundle into a vector bundle of the same rank, and its applications, *J. Math. Soc. Japan.* 69 (2017) 417-457, doi: 10.2969/jmsj/06910417, 査読有

K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, Isometric deformations of cuspidal edges, *Tohoku Math. J.* 68, (2016) 73--90. 査読有

有

S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang,
Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line,
Osaka J. Math. 52 (2015), 285--297. 査読有

〔学会発表〕(計 8 件)

北川義久,
3次元球面内の平坦トーラスに関する直径予想,
榎本一之教授 退職記念研究集会, 2018年3月17日, 東京工業大学,

梅原雅顕,
講演題目: 特異点の微分幾何学
3次元時空の極大曲面をテーマにして
日本応用数理学会 2017年度 年会・総合講演,
2017年9月7日, 武蔵野大学

梅原雅顕,
3次元時空の極大曲面の型変化と小林曲面について,
部分多様体論・湯沢 2016 2016年12月3日,
湯沢町・湯沢グランドホテル

梅原雅顕,
特異点をもつ曲面の幾何学,
第63回幾何学シンポジウム, 2016年8月30日, 岡山大学

北川義久,
3次元球面内の平坦トーラスに関する直径予想,
研究集会「直観幾何学 2016」, 熊本大学,
2016年2月7日

梅原雅顕,
Indices of isolated umbilics on surfaces,
Geometric Analysis in Geometry and Topology, 2015年11月12日, 森戸記念館,
東京理科大学

梅原雅顕,
曲面の臍点の指数について,
福岡大学微分幾何研究会 2015年11月1日,
福岡大学セミナーハウス

相原義弘,
Deficiencies of holomorphic curves in algebraic manifolds
第58回函数論シンポジウム 2015年10月12日, 島根大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北川 義久 (KITAGAWA, Yoshihisa)
宇都宮大学・教育学部・教授
研究者番号: 20144917

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

相原 義弘 (AIHARA, Yoshihiro)
福島大学・人間発達文化学類・教授
研究者番号: 60175718

梅原 雅顕 (UMEHARA, Masaaki)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号: 90193945