1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４８３７
研究課題名（和文）接触多様体におけるReeb流の柔軟性

研究課題名（英文）Flexibility of Reeb flows in contact manifolds

研究代表者
稲葉　尚志（Inaba, Takashi）

千葉大学・大学院理学研究院・名誉教授

研究者番号：４０１２５９０１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：接触多様体において接触構造を固定したまま接触形式を変化させてReeb流を望むように改変する方策を研究した。まず、ダルブー座標空間内に球面の積をReeb流の不変集合として実現した。次に、接触多様体(M,D)内に部分多様体NとN上の流φが与えられたとき、φがM上のReeb流に拡張するためには、φがDとTNの共通部分を保存することが必要十分であることを示した。更にNが等方的ならば、Dに横断的なN上の任意の流は適当な速度変換後にM上のReeb流に拡張される。

研究成果の概要（英文）：We have studied a method of modifying a Reeb flow by changing a contact form while keeping a contact structure unchanged. We have realized, in a Darboux chart, products of spheres as an invariant set of a Reeb flow. We have also proved the following extension theorem for Reeb flows. Let (M,D) be a compact contact manifold, N a submanifold of M and φ a flow on N. Then, φ extends to a Reeb flow on M if and only if φ preserves the intersection of D and TN. Moreover, if N is isotropic, then, any flow on N transverse to D extends, after a suitable reparametrization, to a Reeb flow.

研究分野：数物系科学

キーワード：レーブ流　接触構造

１．研究開始当初の背景

3 次元接触多様体においては Reeb 流の「非」柔軟性が重要な役割を果たした。最大の結果は Taubes (2007)の 3 次元 Weinstein 予想の解決であろう。Eliashberg-Hofer (1994) の次の定理も注目に値する。3 次元空間の標準接触構造を定める接触形式が、コンパクト領域の外では標準接触形式に一致しているとき、その Reeb 流が半有界な軌道を持つならば、必ず周期軌道を持つ。これは一般の流では成り立たない現象であり、Reeb 流の「非」柔軟性を象徴している。彼らはその高次元版も成り立つと予告したが、最近、Geiges-Rottgen-Zehmisch (2014) により 5 次元で反例が構成され、 Reeb 流の柔軟性に関して 3 次元と 5 次元との間に大差があることが判明した。本研究代表者は彼らの構成法を改良し Arai-Inaba-Kano (2014) において以下の結果を得た。奇数次元座標空間内の半分未満次元標準トーラス上の、標準接触構造に横断的な任意の流とその任意の閉不変集合 A（周期軌道を一切含まないフラクタル的な不変集合もあり得ることに注意）に対し、座標空間全体で標準接触構造を定める接触形式で、その Reeb 流がコンパクト領域の外では標準接触形式の Reeb 流に一致し、A 上では（パラメータ変換を除いて）与えられた流に一致し、A 外の軌道は全て非有界であるものが存在する。「トーラスに横断的」という条件は open condition であるから、それら全てを Reeb 流として実現できるということは Reeb 流が「極めて柔軟である」ことを示している。本研究では、高次元 Reeb 流の柔軟性を座標空間に限らない一般の接触多様体上で考察し、高次元 Weinstein 予想の解決に向けて新知見を得たいと考えた。

２．研究の目的

上に述べた論文（A-I-K）においては、座標空間上の標準接触構造と標準トーラスという設定に限定して Reeb 流の柔軟性を考察していた。この設定を取り外し、一般の接触多様体とそれに含まれる接触構造に横断的な部分多様体を対象とした場合の考察も必要であると感じていた。そこで、本研究で申請時に目標とした課題は以下のようであった。

(1) まず、簡単な式で具体的に定義できる部分多様体から始めて、様々な部分多様体上での Reeb 流の改変の具体例を量産したい。

(2) 次に、Reeb 流における周期軌道の破壊について。「3 次元球面上の非特異流は常に周期軌道をもつであろう」という予想は Seifert 予想と呼ばれる難問であったが Kuperberg (1994) によって否定的解決を見た。反例は「破壊カセット」で周期軌道を破壊するという方法で作られる。この方法は Ginzburg (2003) 等によってシンプレクティック多様体の等エネルギー超曲面上のハミルトン流に対しても適用された。本研究では、Reeb 流に対して「破壊カセット」を作ることが出来ないかを考える。そううまくいくとは思えないが、作る試み中に生ずる困難さの中に Weinstein 予想の本質の一端を捉えたい。

(3) 更に、4 次元多様体上の Engel 構造に付随する直線場に対してもその柔軟性を研究したいと考えた。本研究代表者はこれについて以前(2003、2006)に考察を行なった経緯があり、今回の研究で得られるであろう新知見を適用して、新たな発展を目指した。

ゲージ理論の方向からの研究者（「非」柔軟性の追求者）にとっても、本研究のような逆方向からの研究（柔軟性の追求）は、問題点を浮き彫りにするために役立つと信じている。

３．研究の方法

数学の内容面での方策としては、具体的な対象相手の徹底的な計算を通して着実に知識を積み重ねて、一般的な事実への到達を目指す。行動面では、多角的な見方を得るために、国内および海外の研究者（葉層構造、力学系、微分式系、幾何構造等の専門家）たちとの研

究討議が不可欠である。このため、国内外の研究集会への参加や個人的研究連絡を積極的に行うこととした。特に、研究内容の近い４名の連携研究者との研究連絡は重要である。坪井氏には接触構造を保存する微分同相について、松元氏には力学系理論からの考察において、三松氏には接触構造のトポロジーに関して、中山氏には低次元多様体上の流れに関して協力を仰ぐ。また研究期間中に開催のポーランドでの国際会議に参加し、自分の研究の最新状況を発表するとともに、共同研究をした経験のある Walczak 氏等と研究連絡を行うことを計画した。

４．研究成果

最初に、研究の目的に挙げた３つの目標について進展状況を述べる。(1)に関して予想以上の時間を取られたため、(2)と(3)に殆ど手が付けられなかったという結果になってしまった。(1)については、本研究２年目にポーランドでの国際会議でその時点までに得られていた成果を研究発表することが出来、外国の研究者達にも興味を持ってもらうことが出来たのは幸いであった。その後、最終年度に進展があり、その成果は Extending a vector field on a submanifold to a Reeb vector field on the whole contact manifold という表題の研究進行中論文として本研究者のホームページ

http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~inaba/

にアップロードし、誰でも閲覧可能にした。しかし、その結果のままでは深度及び応用の面で今一つ十分な域にまで達していないと自己判断しており、現時点では学術誌への投稿はしていない。更なる進展があり、出版に足る内容となった暁には投稿に進みたいと考えている。以下、本研究の成果の概要を記述する。

(1) 国際会議での発表の時点では、A-I-K の論文で考察した Reeb 流の局所的改変の問題を発展させた。A-I-K では奇数次元座標空間内のトーラスを不変集合として実現したが，奇数次元球面や，それらの積多様体，奇数次元球面と区間の積などについても具体的な構成法により Reeb 流の不変集合として標準接触構造を持つ奇数次元座標空間内に実現できることを示した．

(2) 最終年度には、具体的方法ではなく、応用の広い拡張定理を定式化することができた。即ち、接触多様体(M,D)に部分多様体（接触部分多様体とは限らない）N が与えられ、更に N 上に接触平面場に横断的な流φが与えられたとする。このとき，

定理１． φが M 全体上の Reeb 流に拡張するための必要十分条件は、φが接触平面場 D と TN の共通部分を保存することである。

速度変換も許す場合には次の形となる。

定理 2. φが適当な速度変換後に M 全体上の Reeb 流に拡張するための必要十分条件は、D を定める或る接触形式αが存在して、φの速度ベクトルが N の各点でαの外微分の核に属することである。

これらの結果はこれまでに知られている拡張定理を全て含んでいると考えられる（３次元の横断絡み目の場合や部分多様体が接触部分多様体である場合等）。上記定理の系として応用が広いと考えられるのは無条件に拡張できる次の場合である．

系. N が等方的であるとすると、D に横断的な N 上の**任意**の流φは適当な速度変換後に M 全体上の Reeb 流に拡張可能である。

但し，等方性の定義は Geiges の本(2008)ではなく Foulon-Hasselblatt(2017)のものである。与えられた部分多様体が等方的か否かの判定は一般には難しいと思われるが非等方性の簡単で便利な十分条件を一つ見つけた。

命題. M 上の与えられた接触構造 D に対し，D を定める接触形式でその外微分が N の各点で非消滅なものが存在するならば、N は非等方的である。

今後の研究課題としては、上記の定理や系を部分多様体に限らず、ラミネーションに対しても示したいと考えている。

(3) この他、連携研究者により、流れやシンプレクティック構造に関して本研究に関連する成果が得られている.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Shigenori Matsumoto:
Actions of groups of diffeomorphisms on one-manifolds by C^1 diffeomorphisms, Advanced Studies in Pure Mathematics 72 (2017), 441-451.
http://mathsoc.jp/publication/ASPM/
査読有

② Takashi Tsuboi:
Several problems on groups of diffeomorphisms, Advanced Studies in Pure Mathematics 72 (2017), 239--248.
http://mathsoc.jp/publication/ASPM/
査読有

③ Yoshihiko Mitsumatsu and Elmar Vogt:
Thurston's h-principle for 2-dimensional foliations of codimension greater than one, Advanced Studies in Pure Mathematics 72 (2017), 181-209.
http://mathsoc.jp/publication/ASPM/
査読有

④ Shigenori Matsumoto:
Remarks on the horocycle flows for foliations by hyperbolic surfaces, Proceedings of American Mathematical Society 145(2017), 335-362.
DOI:10.1090/proc/13184
査読有

⑤ Hiromichi Nakayama:
Surface diffeomorphisms with connected but not path-connected minimal sets containing arcs, Journal of Mathathematical Society of Japan 69 (2017) 227-239.
DOI:10.2969/jmsj/06910227
査読有

⑥ Shigenori Matsumoto:
Horocycle flows without minimal sets, Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 23(2016), 661-673.
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/journal/abstract_e/jms230304_e.html
査読有

⑦ Matilde Martinez, Shigenori Matsumoto and Alberto Verjovsky:
Horocycle flows for laminations by hyperbolic Riemann surfaces and Hedlund's theorem, Journal of Modern Dynamics, 10(2016), 113-134.
DOI: 10.3934/jmd.2016.10.113
査読有

〔学会発表〕（計７件）

① Takashi Tsuboi:
Commutators of groups of automorphisms, 2018 IBS Symposium, Geometric Topology and Geometry of String Theory, IBS, 韓国, 2018.

② Yoshihiko Mitsumatsu:
Symplectic structure on Lawson's foliation, Workshop on topological aspects of symplectic foliations, Universite de Lyon I, Lyon, France, 2017

③ **Takashi Inaba:**
Producing compact invariant sets in Reeb flows, Foliations 2016, Bedlewo, Poland, 2016.

④ Shigenori Matsumoto:
Weak equidistribution theorem for harmonic measures, Contact structures, laminations and foliations, Munchen, Germany, 2016

⑤ Shigenori Matsumoto:
Nontrivial attractor repellor maps of S^2 and rotation numbers, Surfaces in Luminy, Luminy, France, 2016

⑥ Takashi Tsuboi:
On the group of real analytic diffeomorphisms, Geometries en action, une conference en l'honneur d'Etienne Ghys, Lyon, France, 2015.

⑦ Hiromichi Nakayama:
弧状連結ではないが連結な極小集合を持つ曲面の微分同相写像の構成,
日本数学会，於 京都産業大学，2015.

〔その他〕
稲葉尚志(Takashi Inaba)のホームページ

http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~inaba/
に Preprint として研究進行中の未完成論文 ‘**Takashi Inaba:** Extending a vector field on a submanifold to a Reeb vector field on the whole manifold’を upload している.

６．研究組織
(1)研究代表者
稲葉　尚志（INABA Takashi）
千葉大学・大学院理学研究院・名誉教授
研究者番号：４０１２５９０１

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
坪井　俊（TSUBOI Takashi）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：４０１１４５６６

松元　重則(MATSUMOTO Shigenori)
日本大学・理工学部・名誉教授
研究者番号：３０１８６３７４

三松　佳彦(MITSUMATSU Yoshihiko)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：９０２０６４４１

中山　裕道(NAKAYAMA Hiromichi)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：３０２２７９７０

(4)研究協力者
なし