様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 5 月 30 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４８４１

研究課題名（和文）双曲多様体とその変形空間へのローレンツ幾何的アプローチ

研究課題名（英文）Deformation Space of Hyperbolic Manifolds and Lorentzian Geometry

研究代表者
糸　健太郎（ITO, kentaro）

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：００３２４４００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：双曲幾何に関係した3次元擬リーマン空間形の理論を精査し，それらを含む構造としてSL(2,C)の幾何学の構築の必要性を認識し，その基盤作りを行った．具体的にはSL(2,C)の中に全測地的空間として含まれる様々な３次元擬リーマン空間形の性質を調べた．特に，これら3次元擬リーマン空間形における曲面論を統一的に扱うべく，SL(2,C)内の実２次元曲面の理論の構築に着手した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
双曲幾何をより広い枠組みで捕らえる試みを行っており，将来的な発展が見込まれる．

研究成果の概要（英文）：We study 3-dimensional pseudo-Riemannian space form which have relation with hyperbolic geometry. We start construction of the geometry of SL(2,C). We study fundamental properties of totally geodesic pseudo-Riemannian space form contained in SL(2,C). Especially, we start construction of theory of surfaces in SL(2,C), wich is a generalization of that in pseudo-Riemannian space forms.

研究分野：幾何学

キーワード：双曲幾何　擬リーマン幾何

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

双曲幾何の研究において，擬リーマン幾何学の観点からの研究が近年多く見られるようになった．特に双曲空間のローレンツ幾何アナロジーである反ド・ジッター空間の研究は，近年大変盛んである．この最近の動向の先鞭を付けたのは Mess である．Mess は 3 次元擬リーマン空間形における globally hyperbolic maximal compact (GHMC) な多様体の分類の研究を行い，特に 3 次元反ド・ジッター空間の GHMC な多様体の変形空間はタイヒミュラー空間の直積として表されることを示した．このことは反ド・ジッター空間が 2 次元双曲幾何，すなわちタイヒミュラー空間論に新しい研究手法を提供することを意味する．特に，反ド・ジッター空間においては Thurston による地震変形定理が視覚的に理解できるようになり，このことは反ド・ジッター空間が双曲幾何の理解に本質的な役割を担うであろうことを予感させる．Bonsante-Schlenker らはこの方向をさらに推し進めて，普遍タイヒミュラー空間と反ド・ジッター空間内の極小ラグランジアン曲面の対応を明らかにした．さて，この Bonsante-Schlenker ら仕事にはもう一つ源泉があり，それは Bryant による 3 次元双曲空間内の平均曲率一定曲面から派生した一連の仕事である．Bryant の仕事は双曲空間を SL(2,C)の中に埋め込むことが本質的であり，その仕事は Aiyama-Akutagawa らによって，反ド・ジッター空間やド・ジッター空間，球面など 3 次元擬リーマン空間形の中の平均曲率一定曲面の理論に拡張されている．Bonsante-Schlenker らの仕事は反ド・ジッター空間に関するこの Aiyama-Akutagawa らの仕事の１つの完成形と見なすことができる．
また，双曲幾何と擬リーマン空間形との別の関わりとしては，McMllen-Mohammadi-Oh らによる，3 次元双曲空間内の全測地的曲面と 3 次元ド・ジッター空間との関係が挙げられる．これは双曲多様体内の測地流の研究の一般化であって，今後はド・ジッター空間へのクライン群の作用も研究の対象として重要であることを意味する．以上のように，反ド・ジッター空間のみならず一般の擬リーマン空間形の理論の必要性が高まっている．

２．研究の目的

双曲多様体，およびその変形空間の研究をローレンツ幾何学との関係から研究することを目的とする．特に Mess, Aiyama-Akutagawa, Bonsante-Schlenker らの仕事で見られる，反ド・ジッター空間内の曲面を 2 次元双曲空間の幾何学に応用するという研究の追求，McMllen-Mohammadi-Oh らの仕事で見られる，双曲空間の全測地的曲面とド・ジッター空間との関係を探る研究の追求，およびそれらの拡張，一般化を目指す．

３．研究の方法

まず双曲幾何の研究では今まで余り必要性のなかった擬リーマン幾何学や擬リーマン対称空間などの一般論を早急に身につける．それと平行して，反ド・ジッター空間を始めとする擬リーマン空間形に関する基本文献，論文に広くあたる．また，勉強会，研究集会を開催して，最新の研究結果を得ると同時に議論する場を設ける．これらの活動を通して，今までの自分の研究と擬リーマン幾何との接点を見いだして双曲幾何と擬リーマン幾何の新たな研究領域を見いだすことを目指す．

４．研究成果

この４年間は必要な知識を身につけると共に，新たな研究対象を見いだすことに費やした．そしてその結果，SL(2,C)の幾何学の構築の必要性を認識し，研究を開始するに至った．このことをより詳しく説明する．まず反ド・ジッター空間は SU(1,1)や SL(2,R)と同一視できる．SL(2,R)は 2 次元双曲空間 H^2 の等長変換群であり，この反ド・ジッター空間 SL(2,R)が H^2 から自分自身への擬等角写像の理論に応用できるのであった．この本質は SL(2,R)内の時間的測地線の空間が H^2 の直積と同一視されるという事実である．このことから SL(2,R)の中の空間的曲面が，そのガウス写像を通して，H^2 の間の写像と対応するのである．このことが，リーマン面の変形理論（タイヒミュラー空間論）において反ド・ジッター空間が重要な理由である．さて，主に 3 次元双曲空間を扱う双曲幾何においては，１つ次元の高い H^3 の間の写像を与えるような反ド・ジッター空間の対応物構造が欲しい．その候補として SL(2,C)を考えるのは自然である． すなわち SL(2,R)の複素化にあたる SL(2,C)の幾何学が 3 次元双曲幾何に応用できるであろうと推測される．実際 SL(2,C)は 3 次元双曲空間の等長変換群であり，SL(2,C)内の時間的全測地的 3 次元多様体の空間が H^3 の直積と同一視されることから，この直感は正当化される．SL(2,R)の理想境界が S^1 の直積であるのに対して，SL(2,C)の理想境界としてはリーマン球面の直積が現れる．SL(2,R)の理想境界に含まれる閉曲線が S^1 の間の写像を与え，閉曲線の SL(2,R)内への拡張が H^2 の写像を与えるのに対応して，SL(2,C)の理想境界に含まれる閉曲面がリーマン球面の写像を与え，その SL(2,C)内への拡張が H^3 の写像を与えるだろう，というのが基本的な見通しである．一方で，SL(2,C)の中に実現できるのは 3 次元反ド・ジッター空間 SL(2,R)=SU(1,1)のみでなく，全ての平坦でない 3 次元擬リーマン空間形は SL(2,C)の中に実現される．ここで SL(2,C)にはキリング形式によって複素内積を入れる．このとき，3 次元球面は SU(2)と同一視され，3 次元双曲空間は SL(2,C)内のエルミート行列全体と同一視される．この観察が Bryant の理論でも重要であった．また平坦な擬リーマン空間形（ユークリッド空間とミンコフスキー空間）は SL(2,C)の接空間（リー環）sl(2,C)の中に実現される．このように

SL(2,C)の中にはH^3とSL(2,R)が共に含まれており，これらを共通に扱うことが出来る構造がSL(2,C)にあると期待されるのである．この方針に従って，基本的な性質（等長変換群がSL(2,C)×SL(2,C)であることなど）の整備にかなりの時間を費やした．1
これらの基礎の上で，擬フックス群の理論への応用を見据えて以下のような考察を行った．まずSL(2,R)の中の空間的曲面の対応物としてSL(2,C)の中の空間的3次元多様体を考えた．すなわちリーマン球面の擬等角写像を境界値に持つような3次元多様体を考えるのである．しかし，なかなか技術的な困難が多いと気づかされた．さて，SL(2,R)の極大曲面がH^2の極小ラグランジアン写像に対応するように，SL(2,R)におけるある凸集合の境界がH^2の地震写像に対応する．このアナロジーを SL(2,C)において考察する試み行った．すなわち，ある凸集合の境界が H^3の複素地震変形に対応すると考えられるのであるが，この方向の研究も高次元の難しさ故に大きな進展はなかった．一方で，SL(2,R)の曲面の一般化として，SL(2,C)内の実2次元曲面を考えるのが最も筋のいい方法ではないかという認識に，この研究課題が終了する頃に至った．すなわちSL(2,R)内の空間的曲面にH^2間の写像が対応することの一般化は，SL(2,C)内の空間的曲面に，H^3 内の２つの曲面の間の写像が対応すると考えるのである．この方向の研究は，この研究課題が終わった直後から急速に発展して現在も継続中である．この理論においては実 3次元擬リーマン空間形の中の曲面論は全て SL(2,C)内の曲面論として統一的に扱うことが出来るようになる．
以上が本研究課題を行うことで得られた思考・認識の発展の概要であるが， これは以下に述べる具体的な活動と共に行われた．まず，2017 年 6 月には東京工業大学で反ド・ジッター空間SL(2,R)の幾何に関する集中講義を行った．また，2018 年度前期は名古屋大学にて 4 年・院生向けにSL(2,C)の幾何の構築に向けた講義を行い，その内容を拡充したものを，2018年11月に金沢大学における集中講義で話した．これらの講義が SL(2,C)の幾何の土台作りに大いに役立った．
また，2016年11月には名古屋大学において勉強会「双曲幾何と AdS 空間」を宮地秀樹氏（大阪大学）と共同で開催した．これはBonsante-Schlenker-Klasnovの代表的な論文３編をテキストにして，そのアイディアと手法を学ぶことが目的であった．具体的には反ド・ジッター空間の中の空間的極大曲面が2次元双曲空間の極小ラグランジュ写像と対応するという理論，同じく空間的区分的全測地的曲面が双曲空間の地震写像に対応するという理論の詳細を理解した．この勉強会には，多くの若手研究者も参加して，日本人数学者がこの分野をキャッチアップすることに役立ったと思われる．その後，2018年1月には宮地秀樹氏（大阪大学）と共同で，反ド・ジッター幾何の第一人者であるBonsante氏を講師に招いて大阪大学において連続講義を行って頂いた．講義やその後の議論から海外の最新の情報を得ることができ大変有意義であった．この講義にも若手研究者が多く参加した．
さらに，本研究課題周辺の，より広い最新の研究成果にふれ議論する場を設けるために，毎年以下のような研究集会，勉強会を開催した：
「リーマン面・不連続群論」研究集会，2019年2月,早稲田大学（松崎克彦氏（早稲田大学），宮地秀樹氏（金沢大学）との共同開催）
「リーマン面・不連続群論」研究集会，2018年2月,名古屋大学（志賀啓成氏（東工大），宮地秀樹氏（大阪大学）との共同開催）
「リーマン面・不連続群論」研究集会，2017年1月,東北大学（志賀啓成氏（東工大），宮地秀樹氏（大阪大学）との共同開催）
「リーマン面・不連続群論」研究集会，2016年2月,東京工業大学（志賀啓成氏（東工大），宮地秀樹氏（大阪大学）との共同開催）
この集会も研究交流や若手数学者の情報発信の場として重要な役割を果たしたと思われる．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　1　件）
<u>糸　健太郎</u>，幾何学と無限（双曲幾何とクライン群），雑誌「数理科学」，査読無，2017 年 2月号

〔学会発表〕（計　7　件）
<u>糸　健太郎</u>，Thurston's earthquake theorem and geometry of SL(2,R), Beltrami 方程式勉強会 Part II，東京工業大学，2019年3月
<u>糸　健太郎</u>，SL(2,R)と SL(2,C)の幾何とその双曲幾何への応用，大阪大学低次元トポロジーセミナー，2019年1月
<u>糸　健太郎</u>，SL(2,R)と SL(2,C)の幾何とその双曲幾何への応用，金沢大学談話会，2018 年 11月
<u>糸　健太郎</u>，3 次元反ド・ジッター空間の一般化としての SL(2,C)，研究集会「Geometry of Riemann surfaces and related topics」，金沢大学，2018 年 10 月
<u>糸　健太郎</u>，3次元反ド・ジッター空間の一般化としての SL(2,C)，東京工業大学談話会，2017年6月
<u>糸　健太郎</u>，双曲幾何と反ド・ジッター空間，函数論サマーセミナー，2016年9月
<u>糸　健太郎</u>，双曲幾何からローレンツ幾何へ，早稲田大学双曲幾何・幾何学的群論セミナー，

2015 年 11 月

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~itoken/