

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04842

研究課題名(和文) 統計多様体の一般化した共形構造

研究課題名(英文) Generalized conformal structures on statistical manifolds

研究代表者

松添 博 (Matsuzoe, Hiroshi)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90315177

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：統計多様体とは確率密度関数の集まり，すなわち統計モデルに自然に構成される幾何学構造を，微分幾何学の視点から定式化したものである．一方共形構造とは，直交性や角度を保つような計量(内積)の同値性についての幾何学構造である．本研究では，変形指数型分布族などの統計モデルが，幾何学構造の逐次性を許容することを示し，ある種の不変統計多様体と平坦統計多様体が一般化した共形構造性を持つことを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来の情報幾何学は，指数型分布族に対して双対平坦空間の構造を議論するものが中心であった．本研究では近年重要性の増している非指数型の分布族に対して，その統計多様体の逐次構造を解明するとともに，不変統計多様体構造と平坦統計多様体構造の間の一般化した共形構造を解明した．統計多様体の幾何学の微分幾何学的基礎として非常に有意義な研究成果である．

研究成果の概要(英文)：A statistical manifold is a generalization of geometric structures naturally formulated for statistical models from the viewpoint of differential geometry, where a statistical model is a set of probability density functions that have suitable regularity conditions. On the other hand, a conformal structure is a geometrical structure for equivalence of metrics (or inner products) that preserve orthogonality and angle. In this study, we show that statistical models such as the deformation exponential families admit sequential geometrical structures, and have a generalized conformal equivalence structures between invariant statistical manifolds and flat statistical manifolds.

研究分野：幾何学

キーワード：統計多様体 情報幾何学 共形射影構造 エスコート分布

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

統計多様体とは、確率密度関数族に自然に定まる幾何学構造を微分幾何学の立場から一般的に定式化したものであり、Riemann 多様体上の双対的なアファイン接続が主要な役割を果たす。その基本は指数型分布族における統計的推論の幾何学であり、尤度関数の最大化手法がダイバージェンスの最小化と双対測地線によって、明かに説明される。

しかしながら、近年の複雑系科学や、隠れ変数を伴う統計的推論などでは、そもそも独立なデータの観測や、データからの尤度関数の記述が不可能である。古典的な統計学を離れた新しい統計手法が必要となり、それに伴う新しい幾何学が現れる。

複雑系科学をはじめとする近年の数理科学の問題では、複雑かつ強相関な現象を議論する必要がある。このような現象で観測されるデータは、正規分布や Poisson 分布などの指数型分布には従わず、指数型確率分布の変形が必要である。このように変形した確率分布、すなわち非指数型確率分布や、変形したエントロピーを用いる統計学を、ここでは異常統計とよぶことにする。申請者のこれまでの研究で、異常統計において基礎的な統計モデルである  $q$ -指数型分布族にも Hesse 構造が導入されることがわかっている。さらに、推定関数 (統計モデル多様体における接ベクトルに相当する。) の意味付けも可能である。

一方 Hesse 構造を理論構成の出発点とすると、確率変数の期待値や独立性の概念が、統計モデルの選び方によって変化する。しかしながらこの修正により、異常統計におけるエスコート分布などの数学的構造を明かに説明することが可能となる。さらに、確率変数の独立性の一般化は、標本空間の代数構造の変化としても説明することができる。相対性理論においては、時間や空間のパラメータは不変ではなく、物体の移動速度や重力などによって変化した。これと同様に異常統計の解析では、統計モデルの設定によって標本空間の代数構造が変化する。統計モデルは観測されたデータからモデル選択によって設定され、パラメータの推定方法は統計モデルごとに異なるので、最終的には観測されたデータから標本空間の代数構造が変化する。

確率変数の期待値の修正は、エスコート分布の選び方、および正値関数の規格化の方法に依存する。正値関数の規格化は、通常  $m$ -規格化とよばれる方法を用いる。情報幾何学では  $m$ -規格化の双対にあたる  $e$ -規格化も知られている。通常の指数型分布の場合には、これら  $e$ -、 $m$ -の規格化は一致する。 $m$ -規格化は幾何学的には統計モデルに射影変換を行っていることを意味しており、統計量の射影的に不変的な性質以外は、確率密度関数への規格化によって失われてしまう。正値関数の規格化は、統計量の本質を保つ変換で行う必要がある。

### 2. 研究の目的

統計多様体の一般化した共形構造の幾何学を解明し、さらにその幾何学の統計学や可積分系理論などとの関連解明を目的とする。

統計多様体とは Riemann 多様体と、その Riemann 計量に適合するアファイン接続の組である。統計多様体上で Riemann 計量の共形変形やアファイン接続の射影変形を議論する場合、適合性の条件のために計量と接続は独立して変形ができず、統計多様体の一般化した共形変形が生じる。その幾何構造は従来からアファイン微分幾何学において研究がなされてきたが、近年の機械学習理論や複雑系科学の進展により、他分野においても重要性が認識されつつある。

そこで本研究は、第一に非指数型確率密度関数族や正値関数族などに対し、統計多様体上の共形構造や射影構造などを含む一般化した共形構造の考察を行う。その結果を発展させ、関数族とは限らない統計多様体の場合に一般化した共形構造の幾何学の深化を目指す。さらに強相関現象に関する統計学や可積分系理論などとの関連も議論する。

### 3. 研究の方法

研究の初期段階では、変形指数型分布族などの統計モデルに対して統計多様体の一般化した共形構造の幾何学的性質を考察する。その結果を発展させ、一般の統計多様体の場合に射影構造や一般化した共形構造などの幾何学理論を構成する。

本研究は幾何学を中心として、統計学や統計物理学など複数の領域にまたがる内容である。そのため他分野で開催される研究会やセミナーなどにも積極的に参加し、関連分野の情報収集に努める。本研究遂行には幾何学の研究者のみならず、統計学をはじめとする他分野の専門家らとの情報交換、研究討論などが必要不可欠であると考えている。

また、本研究で取り上げる問題に関連した異常統計のデータは、非専門家でも容易に入手できるものが数多くある。必要に応じて実社会の現象も参考にする。具体的な統計モデルについてもそれらの幾何学構造を解明する。例えば以下の問題を考察する。

- (1)  $q$ -正規分布族をはじめとする非指数型統計モデルの多様体について、射影幾何的構造や一般化した共形構造などの幾何学的性質を解明する。
- (2) 確率分布の規格化と、統計モデルの幾何構造の関連を考察する。
- (3) 正値関数空間、行列空間などでの情報幾何学を考察する。
- (4) 双対 Schwarz 微分と統計多様体上の双対射影構造の関係など、統計モデルのなす多様体の幾何学を具体例として、幾何学や可積分系理論で新しい数学構造の検討を行う。逆に射影幾何学や対応する可積分系理論などの統計学への応用も考える。

#### 4. 研究成果

本研究では、変形指数型分布族などの統計モデルが、幾何学構造の逐次性を許容することを示し、ある種の不変統計多様体と平坦統計多様体が一般化した共形構造を持つことを示した。

研究の初期段階では (1)  $q$ -正規分布族をはじめとする非指数型統計モデルの多様体に対して、射影幾何的構造や一般化した共形構造などの幾何学的性質を解明する、(2) 確率分布の規格化と統計モデルの幾何構造の関連を考察する、ということを目指して研究を推進した。その結果、確率分布の正規化問題について、 $q$ -正規分布族の場合には  $e$ -正規化と  $m$ -正規化と呼ばれる 2 種類の規格化を組み合わせ、 $q$ -独立性従う確率分布の具体例を構成するなどの研究成果を得た。

研究の中期段階において、確率分布を正值関数まで拡張したエスコート分布を考えることにより、 $q$ -指数型分布族の場合にエスコート分布、及びエスコート期待値が逐次構造を持って現れることが分かった。 $\phi$ -ダイバージェンス、 $\psi$ -ダイバージェンス、及びそれらから誘導される統計多様体の構造など、情報幾何学でこれまでに知られていた幾何学量がエスコート期待値の逐次構造を用いて明快に説明することができた。これらの成果は研究開始段階では想定していなかった内容であり、非常に有意義な研究成果である。なお、年次ごとの研究実績報告では「統計多様体の階層構造」という表現を用いているが、その後の他の研究の進展により、本研究で得られた幾何学構造は「統計多様体の逐次構造」と表現するべきであると判断した。そのため、年次ごとの研究実績報告書とこの研究成果報告書では日本語の表現を変更している。

さらに一般の変形指数型分布族に対しても、エスコート分布の逐次構造、およびそこから定まる幾何学の逐次構造について具体的な計算を行った。その結果  $q$ -指数型分布族の場合と同様に、エスコート分布の逐次構造、およびそこから定義される期待値の逐次構造を用いて、統計多様体やダイバージェンスが構成できることを示した。さらに、不変性や双対平坦性を持つ統計多様体の関係性の記述に、統計多様体の共形射影同値性が重要な役割を果たしていることを示した。

その他研究期間の全体を通して、確率密度関数の規格化と統計モデルの幾何学構造の関係について、いくつかの研究成果を得た。

これらの研究成果は国際学術誌で出版するとともに、情報幾何学に関する国際会議を始めとして国内外の学会などで研究成果発表を行った。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Matsuzoe Hiroshi, Scarfone Antonio M., Wada Tatsuaki	4. 巻 10589
2. 論文標題 A Sequential Structure of Statistical Manifolds on Deformed Exponential Family	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 223 - 230
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-68445-1_26	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hiroshi Matsuzoe	4. 巻 19
2. 論文標題 A Sequence of Escort Distributions and Generalizations of Expectations on q-Exponential Family	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e19010007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Matsuzoe, Tatsuaki Wada	4. 巻 17
2. 論文標題 Deformed Algebras and Generalizations of Independence on Deformed Exponential Families	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 5729-5751
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e17085729	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Monta Sakamoto, Hiroshi Matsuzoe	4. 巻 9389
2. 論文標題 A Generalization of Independence and Multivariate Student's t-distributions	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 740-749
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-25040-3_79	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiroshi Matsuzoe, Antonio M. Scarfone, Tatsuaki Wada	4. 巻 11712
2. 論文標題 Normalization Problems for Deformed Exponential Families	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 279-287
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-26980-7_29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計22件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 17件)

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Sequential Structures of Statistical Manifolds
3. 学会等名 Entropy (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Dually flat structures for q-Gaussian families
3. 学会等名 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Sequential structures of statistical manifolds on deformed exponential families
3. 学会等名 5th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Sequential structures of statistical manifolds
3. 学会等名 International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Geometry of generalized entropy
3. 学会等名 Information Geometry and Affine Differential Geometry III (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Hessian structures on deformed exponential families II
3. 学会等名 The Ninth International Conference on Guided Self-Organisation (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 A sequential structure of statistical manifolds on deformed exponential family
3. 学会等名 3rd conference on Geometric Science of Information (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Unbiasedness of generalized score functions and sequential structures of expectations
3. 学会等名 International Conference on Statistical Physics (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Construction of model selection criterion for q-exponential family
3. 学会等名 International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Generalized expectations for deformed exponential families
3. 学会等名 The 9th World Congress in Probability and Statistics (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Information geometry of anomalous statistics
3. 学会等名 The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Geometry of affine immersions and construction of geometric divergences
3. 学会等名 Information Geometry And Its Applications IV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Geometry of deformed exponential families and unbiasedness of estimating functions
3. 学会等名 1st-International Conference on Differential Geometry (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Geometry of anomalous statistics and its application to computational anatomy
3. 学会等名 Computational information geometry for image and signal processing, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Monta Sakamoto, Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 A generalization of independence and multivariate Student's t-distributions
3. 学会等名 2nd conference on Geometric Science of Information (GSI2015) (国際学会)
4. 発表年 2015年



1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe, Antonio M. Scarfone, Tatsuaki Wada
2. 発表標題 Normalization problems for deformed exponential families
3. 学会等名 4th conference on Geometric Science of Information (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考