

令和 2 年 5 月 21 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04843

研究課題名(和文) 調和束に関連する対象の研究

研究課題名(英文) Study of harmonic bundles and related objects

研究代表者

望月 拓郎 (Mochizuki, Takuro)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：10315971

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：調和束に関する知見を新たな問題や研究対象に適用しました。コンパクトリーマン面上の調和束の自然な変形族について調べ、Hitchin-WKB問題を解決し、階数が2の場合に「極限配置」を決定しました。また、代数関数より得られるKontsevich複体の理論を、ツイスターD加群の一般論を用いて見通しの良いものにしました。さらにモノポールと差分加群の対応の研究を始め、モノポールのDirac型特異性の簡明な特徴付けを与え、体積無限大の非コンパクトケーラー多様体上の正則ベクトル束に関するKobayashi-Hitchin対応を確立しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

調和束に関する以前の研究で得られていた知見を、新しい問題に適用することで興味深い進展が得られ、さらに以前の研究結果をより汎用性の高いものにすることができました。また、モノポールと差分加群の間の新しい対応を追求することで、Dirac型特異点の特徴付けや体積無限大のケーラー多様体上のKobayashi-Hitchin対応などの基礎的な意義を持つ成果が得られました。

研究成果の概要(英文)：We applied the knowledge and results in the study of harmonic bundles to solve new problems and to study new subjects. We studied the natural deformation family of harmonic bundles on a compact Riemann surface. We particularly established the Hitchin-WKB problem, and determined the limiting configuration in the rank 2 case.

We also clarified the relation between the Kontsevich complexes and the mixed twistor D-modules associated to algebraic functions, which allows us to deduce many known results for Kontsevich complexes from a general theory of mixed twistor D-modules. Moreover, we started to study monopoles and difference modules. We established simple characterizations of Dirac type singularity of monopoles. We also established the Kobayashi-Hitchin correspondence for holomorphic bundles on non-compact Kahler manifolds with infinite volume.

研究分野：幾何学

キーワード：調和束 モノポール ツイスターD加群 Kontsevich複体 漸近挙動 Dirac型特異点 Kobayashi-Hitchin対応

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

調和束の研究を進め、ワイルド調和束と有理型平坦束と有理型ヒッグス束の間の同値性を得ていました。また、ツイスターD加群について研究し、純ツイスターD加群とワイルド調和束の同値性や、混合ツイスターD加群の関手性を確立していました。これらの結果より、代数的D加群の半単純性の関手性についての興味深い結果が得られていました。

このような私自身による調和束の研究とは別に、調和束やツイスターD加群に関するさまざまな研究が多く、研究者達によって進められていました。

(1) コンパクトリーマン面上の調和束の自然な変形族に関して、パラメータが大きくなる時の挙動の研究がいくつかのグループによって進められていました。Hitchin方程式は、曲率の寄与とヒッグス場の寄与の和が0という形ですが、Mazzeo-Swoboda-Weiss-Witt達によって、階数が2でスペクトル曲線の分岐が単純な場合には、曲率の寄与とヒッグス場の寄与がそれぞれ0に近づき、さらに特異性の集中によって「極限配置」が見出されていました。また、Katzarkov-Noll-Pandit-Simpsonは、付随するモノドロミー表現の挙動とスペクトル曲線の関係についての予想(Hitchin-WKB問題)を提案していました。これらに触発されて、Collier-Liは、特にヒッグス場が巡回的な場合に、これらの問題について詳細な研究を行っていました。

(2) 代数関数に付随する有理型平坦束のde Rhamコホモロジー群に関して、Kontsevichは通常のde Rhamコホモロジー群のホッジ理論との類似で、Kontsevich複体という複体の族を導入し、そのコホモロジーの次元の一定性を予想していました。そして、ツイスターD加群と関連して、不確定ホッジフィルトレーションというものがSabbahとYuによって導入されていましたが、彼等はEsnaultとともに不確定ホッジフィルトレーションとKontsevich複体の関係を調べ、特に、Kontsevich複体のコホモロジーの次元の一定性を証明していました。ただ、その証明は長い計算を要し、さまざまな方法で得られた結果を組み合わせたように見えました。不確定ホッジフィルトレーションは、ツイスターD加群と関連が深いものであるため、ツイスターD加群の観点からKontsevich複体を理解することで、関連する結果をより直接的に理解することは自然な問題意識でした。

(3) 調和束は、もともとHitchinによってインスタントンの次元簡約として発見されたものでした。モノポールもインスタントンの次元簡約であるため、特に周期性を持つモノポールの研究の無限遠の挙動に関する研究において、調和束に関する知見が活用できると思われましたが、そのような研究はほとんどなされていませんでした。また、Charbonneau-Hurtubiseが円周とコンパクトリーマン面の直積上のDirac型特異性を持つモノポールのKobayashi-Hitchin

対応について研究していました。これに触発されて、周期性を持つモノポールと差分加群の間の同値が得られることが期待されました。

2. 研究の目的

調和束に関する私の研究で得られていた知見を上述の問題(1), (2), (3)等の新しい問題や新しい対象に適用することを試みました。これによって、その問題や対象の研究に新たな展開をもたらすことだけでなく、自分自身の研究をより汎用性の高いものにすることを目指しました。

3. 研究の方法

(1) ワイルド調和束の研究の出発点は調和束の漸近挙動の研究でした。これはスペクトル曲線の挙動によって、特異点のまわりにおける調和束の挙動をおおまかに制御するというものでした。これを特異点の周辺以外にも拡張することで、調和束の自然な族のパラメータが大きい場合の挙動の研究にとりくみました。また、階数が2の場合には、スペクトル曲線の分岐点におけるヒッグス束の様子を分類できることと、リスケーリングを用いることで、パラメータが大きい場合の挙動をより詳細に調べました。

(2) ある条件を満たす代数関数に付随するD加群のVフィルトレーションとその相対 de Rham 複体を比較的容易に記述できることがわかります。この議論を混合ツイスターD加群の場合に拡張することで、代数関数に付随するツイスターD加群のVフィルトレーションの相対 de Rham 複体と、Kontsevich 複体の族の比較を試みました。

(3) モノポールと差分加群の間の同値を作業仮説として研究を進めました。周期性を持つモノポールの研究において、考慮されるべき特異性には二種類あります。一つは無限遠で、もう一つはDirac型特異点です。Dirac型特異点はKronheimerによって導入された概念で、モノポールをHopfファイブレーションに関するインスタントンの次元簡約とみなすことで定式化されます。インスタントンのDirichlet問題が一意的に解を持つことがDonaldsonによって証明されていますので、そのような解とDirac型特異点を持つモノポールを比較しました(大学院生の吉野将旭氏と共同研究)。無限遠に関しては、モノポールのヒッグス場の主要項に関する直交分解が、接続によって漸近的には保たれることを示し、ほぼ調和束の場合に帰着できる、ということを出発点として研究を進めました。また、差分加群からモノポールを構成する上で鍵となるのは、インスタントンのKobayashi-Hitchin対応ですが、体積が無限大のケーラー多様体上では本研究に使えるような一般論はなかったので、その構築を行いませんでした。

4. 研究成果

(1) Hitchin-WKB 問題を解決した。また、階数が 2 の場合に、スペクトル曲線が一般の場合に、極限配置を完全に求めることができました。この結果は、
`Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces` (Journal of Topology, 9, (2016), 1021--1073) として出版されました。

(2) 代数関数に付随する Kontsevich 複体の族が、その代数関数に付随する混合ツイスター D 加群の V -フィルトレーションの相対 de Rham 複体と擬同型であることが示されました。これにより、Kontsevich 複体について示されていた諸定理を混合ツイスター D 加群に関する一般論から導けるようになり、理論全体が見通しの良いものになりました。この結果は、
`A twistor approach to the Kontsevich complexes` (Manuscripta Mathematica, 157, (2018), 193--231) として出版されました。

(3) モノポールの Dirac 型特異点が、ヒッグス場や計量の挙動によって簡明に特徴づけられることがわかりました。この結果は、
`Some Characterizations of Dirac Type Singularity of Monopoles` (Communications in Mathematical Physics, 356, (2017), 613--625) として出版されました (吉野将旭氏との共著)。また、体積無限大のケーラー多様体上の正則ベクトル束に関する Kobayashi-Hitchin 対応を、適切な条件下で確立しました。この結果は、
`Kobayashi-Hitchin correspondence for analytically stable bundles` (Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), 551--596) として出版されました。これらの結果も用いて、周期性を持つモノポールと差分加群の研究を進め、プレプリント
`Periodic monopoles and difference modules (arXiv:1712.08981)`、
`Doubly periodic monopoles and q difference modules (arXiv:1902.03551)`、
`Triply periodic monopoles and difference modules on elliptic curves (arXiv:1903.03264)` を発表しました。

(1), (2), (3) の研究とは別に、ワイルドな特異性を持つ調和束とヒッグス束の間の Kobayashi-Hitchin 対応の証明を与え、プレプリント
`Good wild harmonic bundles and good filtered Higgs bundles (arXiv:1902.08298)` として発表しました。群作用に関する斉次性についても加味することで、フロベニウス多様体や量子 D 加群を微分幾何的な方法で構成する手法が得られたこととなります。

また、有理型平坦束や D 加群とその Riemann-Hilbert 対応についての研究も進めました。

ストークス構造の新しい記述の仕方を導入し、これを用いて、複素直線上のホロノミック D 加群のフーリエ変換として得られる D 加群の無限遠におけるストークス構造を、ベクトル空間と線形写像を用いて具体的に記述する公式を得ま

した。この成果をプレプリント ``Stokes shells and Fourier transforms (arXiv:1808.01037)'' として発表しました。ホロノミック D 加群のリーマン・ヒルベルト対応に関して、複素多様体上の enhanced ind sheaf の複体がホロノミック D 加群の enhanced de Rham 複体になっているのはいつか? という問題について研究し、複素曲線への引き戻しに関する条件で特徴づけました。この研究結果をプレプリント ``Curve test for enhanced ind sheaves and holonomic D modules (arXiv:1610.08572)'' として発表しました。

調和束の射影的な写像による順像として得られるパラボリックヒッグス束に関して研究を行いました。もともと、Donagi-Pantev-Simpson が曲線上のベクトル束上の Hecke 固有層の構成に動機づけられてこの問題について研究し、ターゲットの次元とファイバーの次元がともに 1 の場合に、ある公式を得ていました。彼らの公式をファイバーの次元が一般の場合に拡張しました。これは、一般次元の代数多様体上の調和束のコホモロジーをヒッグス束を用いて表す公式も含んでいます。この成果は Donagi-Pantev-Simpson のモノグラフ Appendix として含まれる予定です。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Takuro Mochizuki	4. 巻 373
2. 論文標題 Kobayashi Hitchin correspondence for analytically stable bundles	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 551, 596
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/tran/7956	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takuro Mochizuki	4. 巻 157
2. 論文標題 A twistor approach to the Kontsevich complexes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Manuscripta Mathematica	6. 最初と最後の頁 193--231
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-017-0989-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mochizuki Takuro, Yoshino Masaki	4. 巻 356
2. 論文標題 Some Characterizations of Dirac Type Singularity of Monopoles	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 613 ~ 625
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-017-2981-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takuro Mochizuki	4. 巻 9
2. 論文標題 Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 1021--1073
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jtopol/jtw018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計37件（うち招待講演 37件 / うち国際学会 29件）

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 The Riemann Hilbert correspondence and Fourier transform
3. 学会等名 Wild Ramification and Irregular Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 望月拓郎
2. 発表標題 調和束・モノポール・インスタントン
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会(招待講演) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Some topics in Kobayashi Hitchin correspondences
3. 学会等名 Integrability, Geometry and Moduli (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Non abelian Hodge theory for Monopoles with Periodicity
3. 学会等名 Resurgence in Mathematics and Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Kobayashi Hitchin correspondences for monopoles with periodicity
3. 学会等名 Algebraic analysis and geometry with a view on Higgs bundles and D-modules (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Kobayashi Hitchin correspondences for periodic monopoles
3. 学会等名 Geometry and integrable systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Periodic monopoles and difference modules
3. 学会等名 Complex Geometry and Lie groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Toda equations and Harmonic bundles
3. 学会等名 Higgs Bundles and Harmonic Maps of Riemann Surfaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Kobayashi-Hitchin correspondence for wild harmonic bundles
3. 学会等名 Quantum Fields, Geometry and Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Periodic monopoles and difference modules
3. 学会等名 Geometry and Physics of Quantum Curves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Stokes shells and Fourier transform
3. 学会等名 CATS5 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Stokes shells and Fourier transform
3. 学会等名 Various Problems of Algebraic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Periodic monopoles and difference modules
3. 学会等名 Recent developments in Higgs theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Kobayashi-Hitchin correspondences for periodic monopoles
3. 学会等名 A workshop on challenges at the interface of Hitchin Systems and String Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Twistor D-modules and some examples
3. 学会等名 Hodge Theory, Stokes Phenomenon and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 A Hukuhara-Levelt-Turrittin type theorem
3. 学会等名 Developments of mathematics at IPMU: in honor of Kyoji Saito (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Mixed twistor D-modules and some examples
3. 学会等名 Higgs bundles and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Mixed twistor D-modules and some examples
3. 学会等名 Algebraic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Decomposition theorem for semisimple algebraic holonomic D-modules
3. 学会等名 プリンストン高等研究所におけるセミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Wild harmonic bundles and related topics
3. 学会等名 プリンストン高等研究所における講義 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 望月拓郎
2. 発表標題 ヒッグス束や接続の小林-ヒッチン対応について
3. 学会等名 岡シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces
3. 学会等名 Landau-Ginzburg models and application (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Periodic monopoles and difference modules
3. 学会等名 Riemann-Hilbert correspondences (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 望月拓郎
2. 発表標題 周期的モノポールと差分加群の間のKobayashi-Hitchin対応について
3. 学会等名 名古屋大学における多弦数理物理学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Periodic monopoles and difference modules
3. 学会等名 Tata研究所におけるcolloquium (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Periodic monopoles and difference modules
3. 学会等名 Complex Analytic Geometry 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces
3. 学会等名 Modern Interactions between Algebra, Geometry and Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces
3. 学会等名 Flat connections, Higgs bundles and Painleve equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces
3. 学会等名 離散群と双曲空間のトポロジーと解析 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces
3. 学会等名 Workshop on New Perspectives on Moduli Spaces in Gauge Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Curve test for enhanced ind-sheaves and holonomic D-modules
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Integrable Systems, Kobe 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Mixed twistor D-modules and some examples
3. 学会等名 D-modules and Hodge theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 A Hukuhara-Levelt-Turrittin type theorem
3. 学会等名 Complex Analytic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Quantum D -modules and mixed twistor D -modules
3. 学会等名 国際研究集会`Mirror Symmetry, Hodge Theory and Differential Equations` (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Quantum D -modules and mixed twistor D -modules
3. 学会等名 ハイデルベルグ大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces
3. 学会等名 The 21th Symposium on Complex Geometry (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Takuro Mochizuki
2. 発表標題 A twistor approach to Kontsevich complexes
3. 学会等名 Mirror Symmetry and Algebraic Geometry 2015 (招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Takuro Mochizuki	4. 発行年 2015年
2. 出版社 Springer-Verlag	5. 総ページ数 xx+487ページ
3. 書名 Mixed Twistor D-modules	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----