

平成 30 年 8 月 23 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04851

研究課題名(和文) 対称空間の部分多様体の幾何と調和写像論の新展開

研究課題名(英文) New Development of Submanifold Geometry and Harmonic Map Theory in Symmetric Spaces

研究代表者

大仁田 義裕 (Ohnita, Yoshihiro)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90183764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、対称空間の部分多様体の幾何学および調和写像論を、幾何学的変分問題、可積分系理論、リー理論、シンプレクティック幾何、の観点から(1)調和写像と可積分系、(2)特殊等質部分多様体、(3)エルミート対称空間のラグランジュ部分多様体、(4)有限及び無限次元等径部分多様体、で研究進展した。とくに、標準球面の等径超曲面のガウス像として得られる複素2次曲面に埋め込まれた閉極小ラグランジュ部分多様体に関する今までの成果を踏まえて、3つの場合を除いて、等径超曲面のガウス像は、ハミルトンnon-displaceableという結果が得られ出版した(入江博, Hui Ma, 宮岡礼子との共同研究)。

研究成果の概要(英文)：In this project we investigate submanifold geometry and harmonic map theory in symmetric spaces from the viewpoints of geometric variational problems, integrable systems, Lie theory of finite and infinite dimension, symplectic geometry: (1) Harmonic maps and integrable systems, (2) homogeneous submanifolds of special types, (3) Lagrangian submanifolds in Hermite symmetric spaces, (5) isoparametric submanifolds of finite and infinite dimensions. Especially, based on our previous study on compact minimal Lagrangian submanifolds embedded in complex hyperquadrics obtained as Gauss images of isoparametric hypersurfaces, we obtained and published a new result that if the Gauss images of isoparametric hypersurfaces in the standard spheres are Hamiltonian non-displaceable except for three cases  $(g, m_1, m_2) = (3, 1, 1), (4, 1, k) (k \geq 1), (6, 1, 1)$  in a joint work with Hiroshi Iriyeh, Hui Ma and Reiko Miyaoka. This result gives a link between classical differential geometry and modern symplectic geometry.

研究分野：微分幾何学

キーワード：極小部分多様体 ラグランジュ部分多様体 対称空間 調和写像 等径部分多様体 可積分系 リー群  
モジュライ空間

### 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、対称空間内の部分多様体の幾何学および調和写像論の微分幾何的側面を中心に研究に取り組んでいる。本研究課題では、研究代表者が中心的役割をして得られた次の研究成果を踏まえて一層の研究の深化と新展開を目指すものである。

(1) 標準球面の等径超曲面のガウス像(ガウス写像の像)として得られる複素2次超曲面に埋め込まれたコンパクト極小ラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性・最小マスロフ数など性質・構造の研究および複素2次超曲面のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体の分類定理、等質な等径超曲面のガウス像のハミルトン安定性の決定(Hui Ma-大仁田 2009, 2014)などの研究成果を踏まえ、等径超曲面のガウス像のハミルトン交叉問題およびラグランジュ・フレアーホモロジーの研究に向かいつつある。

(2) 複素ユークリッド空間および複素射影空間に埋め込まれた第2基本形式平行なラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性定理

(Amarzaya-大仁田 TMJ2003, 2008) や3次元複素射影空間内の第2基本形式平行でない閉極小ラグランジュSU(2)軌道(River Chiang ラグランジアン)のハミルトン安定性定理(Bedulli-Gori 2007, 大仁田 OJM 2007) 等の結果を踏まえて、より一般のエルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の構成・分類問題の研究を進めるべきである。

(3) 奇数次元単位標準球面の等質極小ルジャンドレ部分多様体上の特殊ラグランジュ錐の安定性指数・剛性および関連の3次元極小ルジャンドレ部分多様体の変形の研究(大仁田 2007, 2009) 等の結果を踏まえて、より一般の等質アインシュタイン-佐々木多様体内の高次元等質極小ルジャンドレ部分多様体の構成・変形の研究をすべきであると考えられる。

### 2. 研究の目的

本研究課題では、対称空間における部分多様体の幾何学および調和写像理論を、変形・モジュライ空間、幾何学的変分問題、有限次元および無限次元リー理論の観点から、互いに関わる次の対象の研究の深化と新たな展開を目的とするものである。具体的には、(1) エルミート対称空間のラグランジュ部分多様体と関連する幾何学的変分問題の研究、(2) 標準球面の等径超曲面と複素2次超曲面のラグランジュ部分多様体の幾何学の研究、(3) 曲面から対称空間への調和写像、より一般に多重調和写像、を焦点とする可積分系に関わる微分幾何学的対象の研究、(4) 有限次元および無限次元理論的方法による等径部分多様体の研究。

### 3. 研究の方法

常に集中的かつ総合的な観点をもって本研究課題を推進した。研究代表者は、研究分担者や連携研究者、研究協力者らとは随時それぞれの研究担当に関して有効な研究連絡や議論・情報交換・収集、研究資料作成等を行い、共同研究

に励んだ。国内外の研究集会等にも可能な限り積極的に参加し、研究発表講演や研究交流、情報交換・収集等を務めた。また、研究代表者の所属する大阪市立大学数学研究所において本研究課題に関わる研究集会やセミナー等も実施して研究促進した。

$N^n$  を  $n+1$  次元単位標準球面  $S^{n+1}(1)$  内の等径超曲面(主曲率一定の超曲面)とする。その相異なる主曲率の個数を  $g(=1, 2, 3, 4$  または  $6)$ 、主曲率の重複度を  $(m_1, m_2)$  とする(Münzner 1980, 1981 の有名な定理)。このとき、等径超曲面のガウス像(ガウス写像の像)は、複素2次超曲面内に埋め込まれたコンパクト極小ラグランジュ部分多様体  $L^n$  になり、もとの等径超曲面から  $Z_0$  被覆される。ここで、複素2次超曲面は階数2コンパクト型エルミート対称空間で標準的アインシュタイン-ケーラー計量から定まるシンプレクティック構造をもつ。とくに、Y.G. Oh, 小野肇の結果により、等径超曲面のガウス像は、複素2次超曲面内に埋め込まれたコンパクト単調(monotone)ラグランジュ部分多様体になり、Y.G. Oh, P. Biran らの理論によりフレアーホモロジー(ハミルトンイソトピー不変量)が明確に定義されて、モースホモロジーとフレアーホモロジーを結びつけるスペクトル系列も適用することができる。我々が以前示した等径超曲面のガウス像に対する最小マスロフ数公式  $\mu_L = 2n/g = m_1 + m_2$  (大仁田 2010, Hui Ma-大仁田 JDG2014) は、極めて有用であるこの問題に対するシンプレクティック幾何学を専門とする連携研究者・入江博の寄与は大きい。

入江、中国・清華大学 Hui Ma (馬輝) 教授、東北大学・宮岡礼子教授との共同研究(IMMO)では、等径超曲面のガウス像のハミルトン交叉性(Hamiltonian non-displaceability)問題(与えられたラグランジュ部分多様体  $L^n$  を任意のハミルトンイソトピーで動かしたラグランジュ部分多様体が  $L^n$  といつも交叉するかどうか?)をさらに研究を進め深めるため、RIMS 共同研究(2015年7月)「等径超曲面のガウス像のフレアーコホモロジー」を実施し、共著論文を執筆し arXiv および数学専門雑誌に投稿した。この結果は、等径超曲面のガウス像のフレアーホモロジーを研究することによって得られるもので、すべての非等質な場合を含むほとんどの場合に Hamiltonian non-displaceable であることが分かったが、未解決な場合( $g=3, 4, 6$  で一つの重複度が1の場合。分類より等質)を扱うために、そのフレアーホモロジーの一層の検討を行っている。

また、等径超曲面のガウス像のハミルトン安定性問題の非等質な場合の研究のために、クリフォード系から構成される OT-FKM 型等径超曲面の理論の検討を行っており、入江の組織する水戸幾何セミナー等でもレクチャーを行った。

対称空間の等質部分多様体や有限次元およ

び無限次元等径部分多様体の本研究課題では、コンパクト対称空間の Hermann 作用とその軌道の幾何学研究に着目した。コンパクト対称空間の Hermann 作用の主軌道は、等質な等径部分多様体であり(酒井高司ら OJM 2001)、また、コンパクト対称空間上の Hermann 作用は超極作用で、ヒルベルト空間上の無限次元ゲージ変換群の超極作用を誘導しその主軌道は無限次元等質等径フレッドホルム部分多様体である(C.-L.Terng 1995) ことが知られていることを踏まえ、コンパクト対称空間の Hermann 作用のもとで「良い」性質をもつ軌道の具体的研究にアプローチした。

研究代表者は、お茶の水女子大学での国際研究集会(2016年9月)に参加、J.C.Wood 教授、M.Svensson 教授と研究交流し、無限次元グラスマンモデルによる有限ユニオン数の調和写像に関する新たな研究の進展を知ることができたのは大変有益で、調和写像と可積分系の理論の本研究課題を鼓舞された。

#### 4. 研究成果

研究代表者と Hui Ma 教授の共同研究によって、標準球面内の等径超曲面のガウス像として得られる複素 2 次超曲面のコンパクト極小ラグランジュ部分多様体の(強)ハミルトン安定性およびハミルトン剛性問題は、等径超曲面が等質な場合に完全に決定・分類され、その国際共著論文の Part I, Part II の内の Part I は、微分幾何学分野の世界トップジャーナル Journal of Differential Geometry(2014年)に掲載されたが、2017年世界華人数学者連盟年会(International Consortium of Chinese Mathematicians)においてが 2017 ICCM Best Paper Award の Distinguished Paper Award ICCM 最佳论文奖-若琳奖(Distinguished Paper Award)を受賞したことを付記しておきたい。等質な等径超曲面が階数 2 例外型リーマン対称対から構成される場合を、Part I と同様の手法で精密に扱った国際共著論文 Part II は、本研究課題期間中の 2015 年に Tohoku Mathematical Journal に正式に出版され、等質な等径超曲面のガウス像のハミルトン安定性問題は、完全に解決された。さらに、標準球面内の  $g=4$  の等径超曲面の分類問題で決定的なブレークスルーを与えたことで知られる Quo-Shin Chi 教授(米国・ワシントン大学)は、我々の結果に強い関心を持ち、非等質な場合(OT-FKM 型等径超曲面)のガウス像のハミルトン安定性の我々の研究を激励している。

また、入江、Hui Ma、宮岡礼子との共同研究である等径超曲面のガウス像の Hamiltonian non-displaceability の研究成果を収めた国際共著論文は、Bulletin of the London Mathematical Society から出版された。この結果により、「 $(g, m_1, m_2) = (3, 1, 1), (4, 1, k), (k-1), (6, 1, 1)$  という 3 つの場合を除いて、等径超曲面のガウス像は、Hamiltonian non-displaceable である」という知見が得られた。とくに、全ての非等質な場合を含むほとんどの等径超曲面のガウス像は、Hamiltonian

non-displaceable であることが分かった。残された場合も、Hamiltonian non-displaceable であることが予想される。この場合、等質であることが知られているので、より具体的記述・計算が可能で、いくつかのアプローチで等径超曲面のガウス像の Floer ホモロジーの研究を継続している。この研究は、超曲面の古典的微分幾何学と現代の高度なシンプレクティック幾何学との新たな融合的研究として益々興味深い問題であり、今後も一層の研究に取り組む。

また、非コンパクト型エルミート対称空間内の(コンパクトとは限らない)等質ラグランジュ部分多様体の構成・分類問題も本研究課題において大変興味深いが、連携研究者・梶ヶ谷徹は、複素双曲空間内の等質ラグランジュ部分多様体の場合に新しい構成を与え優れた成果を挙げている。

研究代表者は、大学院学生・吉田稔(当時、阪市大 M2)との共同研究で、コンパクト型対称空間上の Hermann 作用に関して、研究協力者・小池直之(東京理科大学理学部教授)が与えた条件(Hokkaido Math.J. 43 (2014), 44(2015))を満たす極小軌道を、リー代数レベルではほぼ完全に分類するという成果を挙げた。小池の条件を満たす軌道は、誘導不変計量が正規等質になるなど、内的にも外的にも良い性質もつリーマン等質部分多様体で、今後の研究に示唆的である。井川治(京都繊維工業大学)から Hermann 作用の代数的分類に関して有益な専門的知識を得た。研究代表者は、吉田との共同研究で得られた結果を深めるべく、酒井や小池と議論や情報交換を積極的に行い、論文原稿を執筆中である。

大仁田の 2009 年の論文の研究を精密化・一般化すべく、Jong Taek Cho(韓国・全南大学)、橋本要(阪市大数学研)とのコンパクト等質極小ルジャンドレ部分多様体に構成・変形に関する共同研究が新たに始まった。応用として、4 元数構造を利用した奇数次元複素射影空間内のコンパクト等質極小ラグランジュ部分多様体のあるクラスを得た。

調和写像と可積分系の理論の本研究課題においては、連携研究者・Martin Guest と、ループ群・無限次元グラスマンモデルの枠組みを活用した  $SU(2)$  同変なユニタリ群への調和写像の分類問題の共同研究を進めている。研究代表者は、2018年3月の大阪市立大学での国際研究集会でリーマン面から対称空間への調和写像の対称性とモジュライ空間の研究に関するサーベイ講演を行い、その結果も中間報告している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Y. Ohnita: On classification of minimal orbits of the Hermann action satisfying

Koike's conditions (Joint work with Minoru Yoshida), In: Proceedings of The 21st International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds 21(2017), pp.1-15. 査読無

Y. Ohnita: On Floer homology of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, Hermitian-Grassmannian Submanifolds, 235-247, Springer Proc. Math. Stat., 203, Springer, Singapore, 2017. 査読有 DOI 10.1007/978-981-10-5556-0

H. Iriyeh, H. Ma, R. Miyaoka and Y. Ohnita: Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces, Bull. London Math. Soc. (2016) 48 (5): 802-812. 査読有

<https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/blms/bdw040>

Y. Ohnita: Geometry of Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, Proceedings of the 19th International Workshop on Hermitian-Grassmannian Submanifolds and 10th RIRCMI-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop, 283-309, Natl. Inst. Math. Sci. (NIMS), Taejŏn, 2015. 査読無

H. Ma and Y. Ohnita: Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces. , Tohoku Math. J. 67 (2015) 195-246 . 査読有 <https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1435237041>

[学会発表](計16件)

Y. Ohnita: Symmetries and moduli spaces for harmonic maps, International Conference "Geometry of Submanifolds and Integrable Systems", The 15th OCAMI-RIRCMI Joint Differential Geometry Workshop & The 3rd OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems (2018.3.26-3.30) 大阪市立大学. 2018年3月30日. 招待講演

R. Miyaoka and Y. Ohnita: Approach from hypersurface geometry to the Floer theory on Lagrangian intersections, I(R. Miyaoka), II(Y. Ohnita).

"Differential Geometry and Differential Equations: the influence of Mirror Symmetry and Physics", 早稲田大学西早稲田キャンパス, December 11 (Mon)-15 (Fri), 2017, 2017年12月13日(宮岡), 14日(大仁田). 招待講演

大仁田義裕: 小池の条件を満たす Hermann 作用の軌道の分類について, 部分多様体論・湯沢 2017, 新潟県湯沢町・湯沢グランドホテル, 2017年11月30日(木) 12月2日(土), 2017年12月1日. 招待講演

大仁田義裕: Classification of minimal orbits of the Hermann action satisfying Koike's conditions, 福岡大学微分幾何研究集会, 福岡大学セミナーハウス, 2017年11月3日(金) 11月6日(月), 2017年11月4日. 招待講演

Y. Ohnita: Classification of minimal orbits of the Hermann action satisfying Koike's conditions, The 21st International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds & The 14th RIRCMI-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop, Kyungpook National University, Daegu, Korea, October 11 (Wed)-13 (Fri), 2017, 2017年10月13日. 招待講演

Y. Ohnita: On Floer homology of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, 第13回大阪市立大学数学研究所-慶北国立大学 RIRCMI 共催 微分幾何学ワークショップ「部分多様体幾何とリー理論」(2017.3.27-3.30) 大阪市立大学. 2017年3月29日. 招待講演

Y. Ohnita: On Floer homology of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, 東北大学 ミニワークショップ (2017.2.7), 川井ホール(数理科学記念館), 組織: 宮岡礼子教授(東北大学), 2017年2月7日. 招待講演

大仁田義裕: OT-FKM 型等径超曲面について(サーベイ), 90分レクチャー, 大阪市立大学数学研究所 微分幾何学セミナー, 2016年11月9日.

大仁田義裕: OT-FKM 型等径超曲面について(サーベイ), 90分レクチャー, 水戸幾何小研究集会(2016.10.22), 組織: 木村 真琴・大塚 富美子・入江 博(茨城大学理学部数学・情報数理コース), 2016年10月22日. 招待講演

Y. Ohnita: On Floer homology of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, The 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds & The 12th RIRCMI-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop, Kyungpook National University, Daegu, Korea, July 26 (Tue)-30 (Sat), 2016, 2016年7月26日. 招待講演

入江博(茨城大理) Hui Ma(中国・清華大学) 宮岡礼子(東北大理) 大仁田義裕(阪市大理): 等径超曲面のガウス像の Hamiltonian non-displaceability, 日本数学会 2016 年度年会(2016.3.16-3.19) 幾何学分科会 一般講演 筑波大学. 2016年3月16日.

Y. Ohnita: Harmonic maps from Riemann surfaces into symmetric spaces and their moduli spaces I & II, (60

minutes talk x 2), RIMS 研究集会「低次元多様体モジュライ空間の幾何学」, (2015.12.14-12.18), 研究代表者 山田 澄生 (学習院大学), 2015年12月18日. 招待講演

Y. Ohnita: Hamiltonian

non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces (joint work with H. Iriyeh, H. Ma, R. Miyaoka), 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス (2015.10.30-11.2), 2015年11月1日. 招待講演

Y. Ohnita: (I) Geometry of Lagrangian submanifolds in complex hyperquarics, (II) Geometry of the Gauss images of isoparametric hypersurfaces, The 19th International Workshop on

Hermitian-Grassmannian Submanifolds and Its Applications & The 10th RIRC-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop, NIMS, Daejeon, Korea, October 26

(Mon)-28 (Wed), 2015. (I) 2015年10月26日, (II) 2015年10月27日. 招待講演

大仁田義裕: Harmonic maps into symmetric spaces and integrable system approach, 数理物理・幾何ミニワークショップ

(2015.8.23-8.24), 組織: 安井幸則 (摂南大学/OCAMI), 橋本要 (OCAMI), 宝利剛 (神戸大学), 2015年8月24日. 招待講演

大仁田義裕: Lagrangian intersection theory of the Gauss images of

isoparametric hypersurfaces (joint work with Hiroshi Iriyeh, Hui Ma and Reiko Miyaoka), RIMS 研究集会「部分多様体論と種々の幾何構造 (Submanifold theory and geometric structures)」(2015.6.22-6.24), 研究代表者 澁谷 一博 (広島大学), 2015年6月24日. 招待講演

#### [図書](計1件)

"Hermitian-Grassmannian Submanifolds", Daegu, Korea, July 2016. Editors: Young Jin Suh, Yoshihiro Ohnita, Jiazuo Zhou, Byung Hak Kim, Hyunjin Lee, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 203, ISSN 2194-1009 ISSN 2194-1017 (electronic), ISBN 978-981-10-5555-3 ISBN 978-981-10-5556-0 (eBook), DOI 10.1007/978-981-10-5556-0 (総ページ数 360)

#### [その他]

ホームページ等

<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/>

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

大仁田 義裕 (OHNITA, Yoshihiro)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90183764

(2)研究分担者

加藤 信 (KATO, Shin)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 10243354

(3)連携研究者

酒井 高司 (SAKAI, Takashi)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号: 30381445

田中 真紀子 (TANAKA, Makiko S.)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号: 20255623

マーティン ゲスト (GUEST, Martin)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 10295470

入江 博 (IRIYEH, Hiroshi)

茨城大学・理学部・准教授

研究者番号: 30385489

梶ヶ谷 徹 (KAJIGAYA, Toru)

東京電機大学・工学部・助教

研究者番号: 20749361

(4)研究協力者

小池 直之 (KOIKE, Naoyuki)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号: 00281410

橋本 要 (HASHIMOTO, Kaname)

大阪市立大学・数学研究所・専任研究所員

研究者番号: 10647837