

平成 30 年 6 月 3 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04855

研究課題名(和文) 対称R空間と部分多様体の幾何学の研究

研究課題名(英文) Study on geometry of symmetric R-spaces and their submanifolds

研究代表者

田中 真紀子 (Tanaka, Makiko Sumi)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：20255623

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：Jost-Hinrich Eschenburg氏と共同で、外的対称空間の外的対称部分空間の概念を導入し、外的対称部分空間のLie三重系を用いた特徴付けを与えた。

田崎博之氏と共同で、コンパクト古典型Lie群の商群の極大対蹠部分群の分類および大対蹠部分群の決定を行い、その結果を利用して、古典型コンパクトLie環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類を行った。

田崎博之氏と保倉理美氏と共同で、コンパクト例外型Lie群 G_2 の極大対蹠部分群およびコンパクト例外型対称空間 $G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合の分類を行い、 G_2 のCayley代数の自己同型群としての実現を利用して、それらの具体的表示を与えた。

研究成果の概要(英文)：In collaboration with Jost-Hinrich Eschenburg, we introduced the notion of an extrinsic symmetric subspace of an extrinsic symmetric space and gave a characterisation of extrinsic symmetric subspaces by using Lie triple systems.

In collaboration with Hiroyuki Tasaki, we classified maximal antipodal subgroups of the quotient groups of compact classical Lie groups and determined their great antipodal subgroups and by using them we classified maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact classical Lie algebras.

In collaboration with Hiroyuki Tasaki and Osami Yasukura we classified maximal antipodal subgroups of compact exceptional Lie group G_2 and classified maximal antipodal sets of compact exceptional symmetric space $G_2/SO(4)$. We gave an explicit description of them by using the realization of G_2 as the automorphism group of the Cayley algebra.

研究分野：微分幾何学

キーワード：対称R空間 部分多様体 対蹠集合 外的対称空間

1. 研究開始当初の背景

対称 R 空間の概念は、1965 年に長野正により等長変換群を含む非コンパクト Lie 群の作用を許容するコンパクト対称空間として導入され、竹内勝によりその胞体分割をはじめとする基礎的研究がなされた。対称 R 空間は、あるコンパクト型 Riemann 対称空間の線形イソトロピー軌道として実現され、ユークリッド空間の外的対称部分多様体として特徴付けられる他、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形としても特徴付けられる。研究代表者は、連携研究者の田崎博之氏と共同で、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉が離散的ならば対蹠集合になることを証明した(引用文献)。ここで、対称空間の部分集合が対蹠集合であるとは、その任意の点における点対称ですべての点が固定されるときを言う。この結果は、2次元球面(コンパクト型 Hermite 対称空間)の異なる二つの大円(実形)の交叉が互いに対蹠的な二点であることの自然な拡張になっている。

2. 研究の目的

対称 R 空間は対称空間の中でも特に良い性質を有するクラスで、ユークリッド空間および球面の部分多様体としての他、モース理論との関連、階別 Lie 環との関連、微分系理論との関連、シンプレクティック幾何との関連など、多角的に研究がなされてきた。

本研究課題では、対称 R 空間を主に部分多様体論の立場から研究し、その幾何構造をより深く理解すると共に、関連する幾何学への応用を目指した。具体的には、対称 R 空間の対称 R 部分空間(全測地部分多様体でそれ自身対称 R 空間の構造を有するもの)の分類、対称 R 空間およびその商空間の極大対蹠集合の分類を行い、対称 R 部分空間同士の交叉の構造、モース理論との関連、等長変換群を含む大きい変換群の幾何との関連などを調べる。

3. 研究の方法

(1) 対称 R 空間の標準埋め込みは外的対称空間であり、コンパクト充滿外的対称空間が球面に含まれるならば、それは対称 R 空間の標準埋め込みであることが Ferus により知られている。外的対称空間の定義から、外的対称部分空間が自然に定義できる。ただし、連結性は仮定する。外的対称部分空間は、対称 R 空間の全測地的部分多様体で、それ自身対称 R 空間の構造を持つものである。外的対称空間の外的対称部分空間の分類について、Eschenburg-Heintze による先行研究(引用文献)を利用することで、Eschenburg 氏と共同で研究を進める。

(2) 田崎氏との共同研究で、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉が離散的ならば対蹠集合になることを示した。特に、二つの実形が合同なときには、交叉は極大対蹠集合になる。対称 R 空間の対蹠集合につい

ては、田崎氏との共同研究で、標準埋め込みを利用することにより、任意の対蹠集合は大対蹠集合(対蹠集合の位数の最大値を与える対蹠集合)に含まれること、および、大対蹠集合同士は互いに合同であることを示した(引用文献)。これにより、対称 R 空間の極大対蹠集合は合同を除いて一意である。古典型対称 R 空間は、(連結とは限らない)ある古典型コンパクト Lie 群の極地または中心体として実現できることを利用して、極大対蹠集合の具体的表示を求め、さらに、古典型対称 R 空間の商空間の極大対蹠集合を分類する。

4. 研究成果

(1) Eschenburg 氏と共同で、外的対称空間の外的対称部分空間の概念を導入し、外的対称部分空間の Lie 三重系を用いた特徴付けを与えた。

ユークリッド空間 V における外的対称空間 M の部分集合 M' が外的対称部分空間であるとは、 V のある線形部分空間 V' に対して、 M' は M と V' の共通部分の連結成分であり、 M' の任意の点における外的点対称で V' が保たれるときを言う。ユークリッド空間 V における外的対称空間 M に対して、 V はあるコンパクト型 Riemann 対称空間 P の原点における接ベクトル空間と見なすことができ、 V は Lie 三重系の構造を持つ。このとき、 M は P の線形イソトロピー軌道である。我々は、 V の線形部分空間 V' と M の共通部分の連結成分が、外的対称部分空間であるための必要十分条件は、 V' が V の Lie 部分三重系であることを証明した。また、 V の Lie 部分三重系 V' が M と空でない交わりを持つための必要十分条件を与えた。我々の結果から、対称 R 空間 M がコンパクト型 Riemann 対称空間 N の線形イソトロピー軌道として実現されるとき、外的対称空間 M の外的対称部分空間を与えることは、 N の原点を含む全測地的部分多様体を与えることと同値である。本研究については引用文献にまとめた。

(2) 田崎氏と共同で、コンパクト古典型 Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類および大対蹠部分群の決定を行い、その結果を利用して、古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類を行った。

対蹠集合の概念を最初に導入した Chen-Nagano が、コンパクト対称空間の 2-number (対蹠集合の位数の最大値) を決定する際に用いた議論を利用して、古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群を分類し、各共役類の代表元の具体的表示を与えた。その結果を用いて、位数が最大となる極大対蹠部分群(大対蹠部分群)を決定した。これより、一般には、大対蹠部分群ではない極大対蹠部分群が存在すること、および、大対蹠部分群は互いに共役とは限らないことがわかった。これらの結果については発表論文

にまとめた。この論文を投稿する段階で、Griess, Yu による先行研究を知ったが、研究手法や分類結果の表現において相違があることを確認した。

古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類については、外部自己同型を許容する場合が問題になるが、特殊ユニタリ群の場合には、非連結コンパクト Lie 群の標準形を利用して極大対蹠部分群を分類した。これらの結果については発表論文 にまとめた。

コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の分類結果は、コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類に利用できる。コンパクト対称空間 M でコンパクト Lie 群 G の単位元の極地(単位元での点対称による不動点集合の連結成分)として実現できるものについては、 G の極大対蹠部分群の分類結果を利用することにより、 M の極大対蹠部分群の分類が可能になる。これについては、現在研究を進めている。

(3) 田崎氏と保倉理美氏と共同で、コンパクト例外型 Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群およびコンパクト例外型対称空間 $G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合の分類を行い、 G_2 の Cayley 代数の自己同型群としての実現を利用して、それらの具体的表示を与えた。この具体的表示は、極大対蹠集合とモース関数との関連を調べることに応用できる。 G_2 の単位元の極地は、単位元を除けば、 $G_2/SO(4)$ のみであること、また、 $G_2/SO(4)$ の原点の極地は、原点を除けば、二つの 2 次元球面の直積の Z_2 作用による商空間のみであることを利用した。

<引用文献>

M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan Vol. 64, 2012, 1297-1332. The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, J. Math. Soc. Japan Vol. 67, 2015, 275-291. Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type", J. Math. Soc. Japan Vol. 67, 2015, 1161-1168.

J.-H. Eschenburg and E. Heintze, Extrinsic symmetric spaces and orbits of s -representations, manuscript math., Vol. 88, 1995, 517-524.

M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. Vol. 50, 2013, 161-169.

M. S. Tanaka and J.-H. Eschenburg, Extrinsic symmetric subspaces, 投稿中.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki, Maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact Lie algebras, Hermitian-Grassmannian submanifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 203, 査読有, 2017, pp. 39-47.
DOI:10.1007/978-981-10-5556-0

Makiko Sumi Tanaka and Hiroyuki Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, Journal of Lie Theory, 査読有, Vol. 27, 2017, pp. 801-829.
<http://www.emis.de/journals/JLT/>

[学会発表] (計21件)

Makiko Sumi Tanaka, Maximal antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces, Oberseminar Differentialgeometrie, アウグスブルク大学(アウグスブルク・ドイツ), 2017年10月5日(招待講演).

田中真紀子, コンパクト型 Riemann 対称空間の極大対蹠集合, 研究集会「対称空間論とその周辺」, つくばイノベーションプラザ, 2017年9月10日(招待講演).

Makiko Sumi Tanaka, Maximal antipodal sets of the bottom space of $Sp(n)/U(n)$, The 13th OCAMI-KNU RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifolds and Lie Theory, 大阪市立大学, 2017年3月30日(招待講演).

田崎博之, 古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群, 筑波大学微分幾何火曜セミナー, 筑波大学, 2017年2月21日(招待講演).

保倉理美, 例外型コンパクト Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群, 部分多様体論・湯沢 2016, 湯沢グランドホテル, 2016年12月1日(招待講演).

田中真紀子, 田崎博之, 保倉理美, 例外型コンパクト Lie 群 G_2 の極大対蹠部分群, 日本数学会 2016 年秋季総合分科会, 関西大学千里山キャンパス, 2016年9月17日.

田中真紀子, 田崎博之, 古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群,

日本数学会 2016 年秋季総合分科会，関西大学千里山キャンパス，2016 年 9 月 17 日。

Makiko Sumi Tanaka, Maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact Lie algebras, The 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds, Kyungpook National University (韓国・テグ)，2016 年 7 月 28 日 (招待講演)。

Makiko Sumi Tanaka, Antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces, The 11-th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifolds and Lie Theory, 大阪市立大学，2016 年 3 月 22 日 (招待講演)。

田中真紀子，田崎博之，コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群 II，日本数学会 2016 年度年会，筑波大学，2016 年 3 月 16 日。

田崎博之，対称空間の対蹠集合に関連する代数的対象，九大代数学セミナー，九州大学伊都キャンパス，2016 年 3 月 4 日 (招待講演)。

Hiroyuki Tasaki, Maximal antipodal subgroups in the automorphism groups of compact Lie algebras, One-day Workshop on “Submanifolds in Symmetric Spaces”，首都大学東京，2016 年 1 月 22 日 (招待講演)。

田中真紀子，コンパクト対称空間の対蹠集合，大阪市立大学談話会，大阪市立大学，2015 年 12 月 16 日 (招待講演)。

田崎博之，Maximal antipodal subgroups of compact Lie groups, 部分多様体論・湯沢 2015，湯沢グランドホテル，2015 年 11 月 19 日。

Makiko Sumi Tanaka, Isometries of extrinsic symmetric spaces, The 19th International Workshop on Hermitian-Grassmannian submanifolds and its applications, NIMS (デジョン・韓国)，2015 年 10 月 28 日 (招待講演)。

田中真紀子，田崎博之，コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群，日本数学会 2015 年度秋季総合分科会，京都産業大学，2015 年 9 月 13 日。

Jost-Hinrich Eschenburg, Peter Quast, 田中真紀子, Isometries of extrinsic symmetric spaces, 日本数学会 2015 年度

秋季総合分科会，京都産業大学，2015 年 9 月 13 日。

田崎博之，コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群，研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2015」，東京理科大学森戸記念館，2015 年 9 月 8 日 (招待講演)。

田崎博之，対称空間の対蹠集合，第 62 回幾何学シンポジウム，東京理科大学神楽坂キャンパス，2015 年 8 月 30 日 (招待講演)。

田崎博之，A 型コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群，RIMS 研究集会「部分多様体論と種々の幾何構造」，京都大学数理解析研究所，2015 年 6 月 23 日 (招待講演)。

21 Makiko Sumi Tanaka, Antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces, 2015 Joint Workshop: Geometry and Analysis, 東京理科大学野田キャンパス，2015 年 5 月 14 日 (招待講演)。

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

[その他]
ホームページ等
<https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01Detail.php?act=nam&kin=ken&diu=2cad>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 真紀子 (TANAKA, Makiko Sumi)
東京理科大学・理工学部数学科・教授
研究者番号：20255623

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

田崎 博之 (TASAKI, Hiroyuki)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：30179684

(4) 研究協力者

Jost-Hinrich Eschenburg
Peter Quast
木村 太郎 (Taro Kimura)