

令和 2 年 6 月 22 日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04863

研究課題名(和文)リーマン多様体内の1次元弾性体の数学的モデルとその応用

研究課題名(英文) Mathematical models on one-dimensional elastic bodies in Riemannian manifolds and their applications

研究代表者

川久保 哲 (Kawakubo, Satoshi)

兵庫県立大学・物質理学研究科・教授

研究者番号：80360303

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：1次元弾性体の数学的モデルであるキルヒホッフ弾性棒，及びその可積分系としての拡張である，ソリトン曲線について研究を行った．主な結果の一つは次の通りである．即ち，3次元ユークリッド空間内において，捻率が一定ではないような第4ソリトン曲線の具体例を構成した．これらの曲線は球面曲線となり，またヤコビの楕円関数を用いて陽に表せることも示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン多様体内で，測地線以外の曲線の研究は十分になされてるとは言い難い．本研究の特色は，リーマン多様体の中で測地線よりも豊富な例をもつ曲線を系統的に研究することにある．元来，キルヒホッフ弾性棒などの1次元弾性体の数学的モデルは，工学的な観点から研究されることが多く，曲線が入っている空間を一般化するという考えはほとんどなかった．本研究成果の学術的意義の一つとしては，キルヒホッフ弾性棒やその一般化であるソリトン曲線をリーマン多様体内で系統的に研究したことにある．また，いくつかのケースにおいて，これらの曲線を具体的に表示し，詳細な解析を行ったことも学術的意義の一つである．

研究成果の概要(英文)：Kirchhoff elastic rods (one of the mathematical models on one-dimensional elastic bodies) and soliton curves (one of the generalizations of Kirchhoff elastic rods as an integrable system) were studied. One of the results is the following: in three-dimensional Euclidean space, examples of fourth soliton curves with nonconstant torsion were constructed. Also, it was proven that these curves are spherical and explicitly expressed in terms of Jacobi elliptic functions.

研究分野：微分幾何学

キーワード：キルヒホッフ弾性棒 弾性曲線 変分問題 渦糸 局所誘導階層 ソリトン曲線 変形KdV方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

空間の中でピアノ線を変形すると、元の真っ直ぐな形に戻ろうとする力が働く。このような、弾力が強くて細い針金状の物体を一次元弾性体という。一次元弾性体を曲げて曲線状にするとエネルギーが蓄えられるが、これは曲線の曲率の2乗の積分(曲げエネルギー)によって表される。エラスティカは、この曲げエネルギーが臨界になる曲線として定義される。一方、キルヒホッフ弾性棒の場合は、曲げエネルギーと共に捩れエネルギーを考える。キルヒホッフ弾性棒は、この2つのエネルギーの和が臨界になるような曲線(正確には棒付き曲線)として定義される。

キルヒホッフ弾性棒を考えることにより、測地線やエラスティカの場合には得られない、興味深い曲線が構成できる。例えば、変分問題の解で、4次元以上の空間形内に充満に埋め込まれたものを構成せよ、という問題を考える。測地線の場合、それ自身が一次元全測地的部分多様体であるからもちろんそのようなものは存在しない。エラスティカの場合も、必ず3次元全測地的部分多様体に含まれてしまうことが1980年代から知られている。しかし、キルヒホッフ弾性棒の場合、充満に埋め込まれたものが存在することが研究代表者により示された。なお、ここで構成されたものは螺旋になっており、曲線としては新しいものではなかったが、研究代表者はその後、5次元空間形内に、螺旋ではない充満なキルヒホッフ弾性棒の例を無限個構成した。これは曲線としても新しいものであり、その自然曲率は sn 関数を用いて具体的に表すことができる。これらのことから、キルヒホッフ弾性棒は、弾性体のモデルとしてだけでなく、純粋に部分多様体論の観点から見ても興味深い曲線であると言える。

また、キルヒホッフ弾性棒やエラスティカは、曲面論、特に擬球、ウィルモア曲面、平均曲率一定曲面などへ応用できることが知られている。この際、ユークリッド空間以外のリーマン多様体の中で考えることが鍵となる。例えばピンカールは、2次元球面内のエラスティカを用いて、3次元ユークリッド空間内のウィルモア曲面の具体例を構成した。

エラスティカやキルヒホッフ弾性棒は、オイラーの時代以来、主に3次元ユークリッド空間内で考えられてきた。しかし、上に述べたように、一般のリーマン多様体内のキルヒホッフ弾性棒やエラスティカを考えることにより、曲線論としての興味深い例が得られるだけでなく、曲面論への応用も広がることが期待できる。このことから研究代表者は、リーマン多様体内の一次元弾性体の数学的モデルを系統的に研究することが重要であるという認識に至り、本研究を開始した。

2. 研究の目的

本研究課題の申請時における研究目的は以下の通りである。

(1) 空間形内のキルヒホッフ弾性棒の具体的な表示式を求め、幾何学的性質を明らかにする。

3次元定曲率球面、3次元双曲空間内においては、キルヒホッフ弾性棒(エラスティカを含む)の具体的な表示式は長らく得られていなかった。その原因は、座標の構成に必要な2つのキリングベクトル場の関係が不明なためであった。2008年、研究代表者はこの2つのキリングベクトル場が可換であることを証明して、この困難を克服し、3次元定曲率球面、3次元双曲空間内のキルヒホッフ弾性棒を、 sn 関数を用いて具体的に表した。これにより3次元空間形内の全てのキルヒホッフ弾性棒を目に見える形で捉えることができるようになった。

一方、4次元以上の空間形においては、全てのキルヒホッフ弾性棒の具体的な表示式を求めることは非常に難しい。しかし上に述べたように、研究代表者は5次元空間形内の螺旋でない充満なキルヒホッフ弾性棒の例を無限個構成し、その自然曲率をヤコビの sn 関数を用いて具体的に表示した。この曲線の幾何学的性質をさらに詳しく調べるため、曲線自身の具体的な表示式を求める。またこの例の中に、閉じた曲線が存在することを証明する。

(2) 3次元空間形内のソリトン曲線の具体的な表示式を求める。

キルヒホッフ弾性棒の方程式は、19世紀から“解ける方程式”として研究されてきたが、その背後に局所誘導方程式という無限次元可積分ハミルトン系が関わっていることが、1980年代から分かってきた。局所誘導方程式に付随した発展方程式の無限列を局所誘導階層とよび、第 n 番目の発展方程式に対する定常問題の解を第 n ソリトン曲線という。3次元空間形内の第3ソリトン曲線はキルヒホッフ弾性棒に一致することが示されており、その意味で、ソリトン曲線はキルヒホッフ弾性棒の一般化となっている。

研究代表者は3次元空間形内の第 n ソリトン曲線の座標表示を、その曲率と捩率を用いて表した。従って、もし曲率と捩率を具体的に表すことができれば、ソリトン曲線自身を表示できたことになる。 n が3以下ならば、それができていることが分かっているが、一般の場合はまだ示されていない。本研究では、一般の場合に曲率と捩率を具体的に表し、第 n ソリトン曲線自身の表示式を求める。

(3) 3次元ユークリッド空間内のソリトン曲線の結び目理論への応用について研究する。

結び目理論の一つの問題意識として、任意の結び目型が与えられた時、その中から形のきれいな代表元を選び出す、という事がある。ランガーは、3次元ユークリッド空間内の任意の結び目型は、必ず閉じたソリトン曲線によって代表される、という予想を提出している。これに対しては、第3ソリトン曲線は全てのトーラス結び目を実現する事、第4ソリトン曲線以降にトーラス

結び目ではない結び目が存在すること(カリーニ, アイヴィー)などが示されている. ランガーの予想をふまえ, 閉ソリトン曲線が, カリーニ, アイヴィーらが示したものの他に, どのような結び目をなすかを明らかにする. さらにランガーの予想の証明を試みる.

3. 研究の方法

(1) 空間形内のキルヒホッフ弾性棒の具体的な表示式を求め, 幾何学的性質を明らかにする.

4次元以上の空間形内の場合, 直交群(3次以上)が非可換であることが一つの原因となっており, 全てのキルヒホッフ弾性棒の具体的な表示式を得ることは大変困難になる. そこで, できるだけ多くのクラスについて具体的な表示式を得ることを目標とする. 研究代表者は通常フレネ枠とは異なる自然枠という枠を用いてオイラー-ラグランジュ方程式を書き下し, ある種の対称性を満たす解を求めた. これにより, 5次元空間形内に螺旋ではない充満なキルヒホッフ弾性棒の例を無限個構成することができた. 今のところ, ある技術的理由により, 5次元の場合以外は構成できていない. まずこの点を改良し, 4次元の場合, そして奇数次元の場合に拡張する. また, 5次元空間形内の場合に, 3次元の時と類似の円柱座標の構成を行い, 曲線自身の具体的な表示式を求める. さらに, 曲線が閉じるための条件を解析し, 螺旋ではない充満な閉キルヒホッフ弾性棒を構成する.

(2) 3次元空間形内において, ソリトン曲線の具体的な表示式を求める.

研究代表者は, 3次元空間形内の第 n ソリトン曲線の座標表示を, その曲率と撓率を用いて表した. 従って, もし曲率と撓率を具体的に表すことができれば, 曲線自身を完全に表示できたことになる. n が3以下ならば, それができることが既に分かっている. 研究代表者は, 撓率一定な第4ソリトン曲線について, 曲線自身を陽に表示できることを示した. さらに, 準周期的なものを構成することができた. 本研究では, まずこの中に周期的なものも存在することを示す. n が5以上の場合でも, 何らかの条件を課すことによって, 曲線自身の表示を求められると考えられるので, 本研究で遂行する. もしも具体的な表示式を得ることが困難な場合は, 有限次元ハミルトン系としてのリウヴィル可積分性を証明する.

4. 研究成果

(1) 研究目的及び研究方法の(2)の $n=4$ の場合に関して, 次のような結果を得た. まずこれまでの研究で, 3次元ユークリッド空間内の撓率一定の第4ソリトン曲線の例は得られている. これに対して, 撓率が一定ではないような第4ソリトン曲線を構成し, 陽な表示式を求めた. 具体的には, ヤコビの楕円関数を用いて表した. ここで構成した曲線は球面曲線になることも分かる. また, この曲線が周期的になるための条件についても調べた.

(2) ソリトン曲線は, もともとは3次元ユークリッド空間内で定義されたものであるが, これは一般の向き付けられた3次元リーマン多様体内の概念に拡張することができる. 特に3次元空間形内のソリトン曲線の研究は, 曲面論への応用が知られており, 興味深い対象である. 研究代表者は以前に, 3次元空間形内のソリトン曲線の円柱座標表示を, その曲率と撓率を用いて陽に表示する, という結果を得ている. この証明の細部を埋めて完成させ, 論文“Soliton curves in three-dimensional space forms”にまとめて, 学術雑誌 Journal of Geometry and Physics に投稿し, 掲載された(5. 主な発表論文等の[雑誌論文]を参照).

(3) 局所誘導階層, 及びソリトン曲線のある種のエルミート対称リー代数内に拡張する研究を行った. 具体的には, 特殊ユニタリー環内において, ソリトン曲線を厳密に定義した. また, ある条件をみたすキリングベクトル場と局所誘導階層の再帰作用素との関係について調べた.

(4) キルヒホッフ弾性棒の楕円関数による表示式について研究した. 3次元ユークリッド空間内のキルヒホッフ弾性棒には, 陽な表示式がいくつか知られている. 代表的なものとしては, 円柱座標による成分をヤコビの sn 関数によって表示するもの(アイヴィーとシンガーによる結果等)がある. 研究代表者は未定係数法を用いることにより, キルヒホッフ弾性棒の直交座標成分を楕円関数によって陽に表した. この表示式を用いることにより, キルヒホッフ弾性棒の離散化の試みへの応用が期待できる.

(5) 3次元ユークリッド空間内において, ソリトンクラスのサブクラスに属する曲線である擬似平面的ソリトンについて研究した. 擬似平面的ソリトンとは, 撓率一定弧長パラメータ曲線であり, ある常微分方程式を満たすようなものとして定義される. カリーニとアイヴィーは, 擬球面から擬球面への古典的なベックルント変換を, その漸近線に制限することによって, 撓率一定弧長パラメータ曲線から撓率一定弧長パラメータ曲線へのベックルント変換を定義した. 彼らは擬似平面的 n ソリトンをベックルント変換すると擬似平面的 $n+1$ ソリトンになる, という予想を行っているが, この予想の証明を試みた. もしこの証明が完成すれば, 閉ソリトン曲線がどのような結び目をなすか, という問題(研究目的の(3))に対する知見が得られると期待できる.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Satoshi Kawakubo	4. 巻 133
2. 論文標題 Soliton curves in three-dimensional space forms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 242--259
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2018.07.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 川久保哲
2. 発表標題 Frenet 振率一定ではない第 4 ソリトン曲線について
3. 学会等名 小磯憲史先生退職記念研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 川久保哲
2. 発表標題 局所誘導階層の第 4 ソリトン曲線
3. 学会等名 関大微分幾何研究会（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Satoshi Kawakubo
2. 発表標題 Fourth soliton curves of the localized induction hierarchy
3. 学会等名 OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----