

令和 3 年 6 月 9 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2020

課題番号：15K04865

研究課題名(和文)ヘガードフレアー理論を用いた結び目と写像類群の研究

研究課題名(英文)A study on knots and mapping class groups using Heegaard Floer theory

研究代表者

松田 浩(Matsuda, Hiroshi)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：70372703

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：4次元球面内の2次元結び目を表す方法として3次元球面内のマーク付きグラフによる表示方法と3次元球面への射影図による表示方法が知られている。3次元球面内のマーク付きグラフによる表示方法を使って2次元結び目に対するホモロジー不変量を構成した。また3次元球面への射影図による表示方法を使って2次元結び目に対するホモロジー不変量を4種類構成した。これらのホモロジー不変量は具体的な2次元結び目に対して計算することができ、2ツイストスパン三葉結び目と0ツイストスパン三葉結び目を区別できることが分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1次元結び目の研究においては結び目図式のスケイン関係式を用いて多項式不変量やホモロジー不変量の研究が進展している。しかし2次元結び目の研究においては結び目図式のスケイン関係式をうまく定義することができないため基本群やカンドル構造を使った研究が中心である。1次元結び目の研究においてスケイン関係式を使わずに定義された接触ホモロジー理論から着想を得て、2次元結び目の研究にホモロジー不変量を導入することができた。これにより2次元結び目の研究においても1次元結び目の研究に追隨する進展を期待することができる。

研究成果の概要(英文)：There are two methods of representing 2-dimensional knots in the 4-sphere, using marked graphs in the 3-sphere, and using projections into the 3-sphere. I constructed homological invariants for 2-dimensional knots in the 4-sphere using these two representations. Calculating these homologies explicitly, it was shown that both distinguish the 0-twist spun-trefoil knot from the 2-twist spun-trefoil knot.

研究分野：幾何学

キーワード：結び目 ホモロジー

1. 研究開始当初の背景

3次元球面内の結び目についての研究は2000年頃まではAlexander多項式、Jones多項式を初めとする多項式不変量を使った研究が中心であった。2000年頃からはそれぞれの圏化であるHeegaard Floerホモロジー、Khovanovホモロジーを初めとするホモロジー不変量の研究へと発展していた。また理論物理学の観点からOoguri氏とVafa氏は新たな結び目不変量を提案していた。さらにシンプレクティック場の理論の観点からEliashberg氏、Givental氏、Hofer氏は結び目を初めとする部分多様体の不変量を提案していた。これらの提案を3次元球面内の結び目に対して数学として実現するため、Ekholm氏、Etnyre氏、Ng氏、Sullivan氏は、余球面束を使ったフレアー理論を展開することにより、次数付き微分代数を構成し、結び目接触ホモロジー群を定義していた。さらにNg氏は結び目接触ホモロジー群を組合せ的に定義する方法を与えていた。また結び目接触ホモロジー群の定義に、カンドルを使って結び目のメリディアンを取り入れると3次元球面内の結び目に対する完全不変量を得られることがEkholm氏、Ng氏、Shende氏により示されていた。

4次元球面内の2次元結び目についての研究は、多項式不変量を構成するための基礎となる結び目図式のスケイン関係式を定義することが困難である。そのため基本群、カンドル構造を使った研究が主流であり、多項式不変量やそれらを圏化するホモロジー不変量を使った研究が発展しているとはいえなかった。

2. 研究の目的

3次元球面内の結び目についての研究で発展してきたヘガードフレアー理論を中心とするアイデア、技術を活かして写像類群、4次元球面内の2次元結び目についての研究を発展させる。特にフレアー理論の一種であり、結び目図式のスケイン関係式を使わずに定義されている結び目接触ホモロジー群を参考にして4次元球面内の2次元結び目についての研究へ応用していく。結び目の閉組み紐表示を使うとシンプレクティック幾何学において定義された結び目接触ホモロジー群を計算する手法が存在することが知られている。また組合せ的に定義された結び目接触ホモロジー群は、結び目の組み紐表示、ブラット表示、正則表示のそれぞれを使って計算する手法が存在することが知られている。様々な表示方法を使って定義されている組合せ的結び目接触ホモロジー群の定義を4次元球面内の2次元結び目に対して拡張することで、2次元結び目のホモロジー不変量を構成する。

3. 研究の方法

2次元結び目の表示方法として(1)3次元球面内のマーク付きグラフによる方法、(2)3次元球面への射影図による方法、(3)2次元閉組み紐表示による方法、の3種類がよく知られている。2次元結び目の不変量を構成するために、まずは(1)と(2)の表示方法を使う。

(1)の表示方法において異なるマーク付きグラフが同じ2次元結び目を表すとき、これらのマーク付きグラフは吉川移動と呼ばれる8種類の局所的な操作を有限回施すことで移りあうことが知られている。そこでマーク付きグラフに対して次数付き微分代数を定義し、吉川移動で不変となるように同値関係を定義することにより、2次元結び目のホモロジー不変量を構成する。

(2)の表示方法において異なる射影図が同じ2次元結び目を表すとき、これらの射影図はRoseman移動と呼ばれる6種類の局所的な操作を有限回施すことで互いに移りあうことが知られている。そこで射影図に対して次数付き微分代数を定義し、Roseman移動で不変となるように同値関係を定義することにより、2次元結び目のホモロジー不変量を構成する。

4. 研究成果

3次元球面内のグラフによる表示方法を使って構成した2次元結び目の次数付き微分代数は吉川移動に関して安定同値と呼ばれる代数的な同値関係で不変であることが分かった。特に次数付き微分代数のホモロジー群は2次元結び目の不変量であることが分かった。このホモロジーの0次元部分はコード代数と呼ばれ計算が比較的容易である。2ツイストスパン三葉結び目と0

ツイストスパン三葉結び目に対して具体的にコード代数を計算し、得られた代数から有限体への写像の個数を計算することにより、コード代数は 2 ツイストスパン三葉結び目と 0 ツイストスパン三葉結び目を区別することに使えることを示した。

3 次元球面への射影図による表示方法を使って構成した 2 次元結び目の次数付き微分代数は Roseman 移動に関して安定同値と呼ばれる代数的な同値関係で不変であることが分かった。特に次数付き微分代数のホモロジー群は 2 次元結び目の不変量であることが分かった。この表示方法を使った研究においては、鎖群の微分写像が射影図の 3 重点の周りで自然に 4 種類構成されている。そのため次数付き微分代数も 4 種類構成されている。2 ツイストスパン三葉結び目と呼ばれる 2 次元結び目に対しこれら 4 種類の次数付き微分代数を具体的に計算し、少なくとも 3 種類の次数付き微分代数は異なる情報をもっていることを示した。この計算のために次数の情報を落とした特性代数を構成し、有限体への写像の個数を計算した。0 ツイストスパン三葉結び目には 3 重点を持たない 3 次元球面への射影図が存在するため 4 種類の次数付き微分代数は全て同型であることが分かる。これらのことから 3 次元球面への射影図による表示方法を使って構成した微分代数は 2 ツイストスパン三葉結び目と 0 ツイストスパン三葉結び目を区別することに使えることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-----------------|
| 1. 著者名 Hiroshi Matsuda | 4. 巻 29 |
| 2. 論文標題 2-knot homology and Yoshikawa move | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Knot theory and Its Ramifications | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216520500674 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 松田 浩 |
| 2. 発表標題 2-knot homologies: Roseman and Yoshikawa |
| 3. 学会等名 拡大KOOKセミナー2019 |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 松田 浩 |
| 2. 発表標題 2-knot homologies: Roseman and Yoshikawa |
| 3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺 |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---------------------------------------|
| 1. 発表者名 松田 浩 |
| 2. 発表標題 境界付き多様体のHeegaard Floer理論 |
| 3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺（招待講演） |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroshi Matsuda |
| 2. 発表標題 Homological invariants of surface-knots |
| 3. 学会等名 Differential Topology 17 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 松田 浩 |
| 2. 発表標題 Bordered Floer homology of Torelli elements |
| 3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演) |
| 4. 発表年 2015年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
| | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
| | |