

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04866

研究課題名(和文) ハンドル体結び目の向きと不変量

研究課題名(英文) Orientations and invariants of handlebody-knots

研究代表者

石井 敦 (ISHII, Atsushi)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：00531451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ハンドル体絡み目は、3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことです。種数1のハンドル体結び目は通常の結び目に対応しています。つまり、ハンドル体結び目は結び目の自然な一般化になっています。本研究の研究成果は次あげる通りです：multiple conjugation biquandle と呼ばれる部分的に群の構造を持ったバイカンドルを定義しました。multiple conjugation biquandle に対して (co) ホモロジー理論を展開しました。

研究成果の概要(英文)：A handlebody-link is a disjoint union of handlebodies embedded in the 3-sphere. A genus one handlebody-knot corresponds to a usual knot. That is, a handlebody-knot is a natural generalization of a knot. The results of this study are as follows: We defined a multiple conjugation biquandle, which is a biquandle with partial group operations. We introduced the (co) homology theory for a multiple conjugation biquandle.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：結び目理論

1. 研究開始当初の背景

(1) ハンドル体結び目

ハンドル体結び目とは、3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことです。複数のハンドル体を3次元球面に埋め込んだものはハンドル体絡み目と言います。種数1のハンドル体結び目は通常の結び目(1次元球面の3次元球面への埋め込み)に対応するので、ハンドル体結び目理論は結び目理論の一般化です。

ハンドル体結び目は境界付き3次元多様体なので、ハンドル体結び目に多様体の向きを与えることができますが、この向きは結び目の向きの一般化にはなっていません。これに対して、 S^1 向きとよばれるハンドル体結び目の向きが、結び目の向きの自然な一般化として導入されたところでした。

(2) カンドルとバイカンドル

カンドルは、結び目のダイアグラムに対するライデマイスター変形を公理化して得られる代数であり、結び目の不変量を定義することができます。特に、群は共役演算とともにカンドルを成し、このカンドルは結び目補空間の基本群を与えます。結び目カンドルからあるカンドルへの準同型写像は結び目彩色を与え、その濃度は結び目彩色不変量となります。

一方、バイカンドルも、結び目のダイアグラムに対するライデマイスター変形を公理化して得られる代数であり、結び目の不変量を定義することができます。カンドルとの違いは、カンドルがアークを対象に交点において一つの演算を対応させて代数の公理系を得るのに対して、バイカンドルはセミアークを対象に交点において二つの演算を対応させて代数の公理系を得ることです。特に、バイカンドルの over-arc に付随する演算を自明にするとカンドルになり、バイカンドルはカンドルの一般化であることがわかります。

(3) 多重共役カンドル(と多重共役バイカンドル)

多重共役カンドルは、ハンドル体結び目のダイアグラムに対するライデマイスター変形を公理化して得られるカンドルであり、ハンドル体結び目の不変量を定義することができます。カンドルとの違いは、交点だけでなく頂点にも演算を対応させて代数の公理系を得ることです。頂点に対応させる演算は、多重共役カンドルにおいて部分的な積演算として実現されます。

一方、多重共役バイカンドル(とよぶべきも

の)はまだ定義されていませんでした。多重共役バイカンドルは、バイカンドルと多重共役カンドルの一般化であり、ハンドル体結び目の不変量を定義することができます。

2. 研究の目的

ハンドル体結び目に対して定義された S^1 向きの構造を用いることで、新しい不変量を構成し、ハンドル体結び目の性質を解明するのに役立てることが研究の目的でした。

(1) 多重共役バイカンドル

カンドルは結び目のアーク彩色に関する普遍的な代数であり、バイカンドルは結び目のセミアークに関する普遍的な代数です。ハンドル体結び目のアーク彩色に関する普遍的な代数として多重共役カンドルが定義されていましたが、ハンドル体結び目のセミアーク彩色に関する普遍的な代数(多重共役バイカンドル)は定義されていませんでした。多重共役バイカンドルを定義することは研究の目的の一つでした。

(2) (コ)ホモロジー理論の構築

結び目の(バイ)カンドルコサイクル不変量は、(バイ)カンドルの(コ)ホモロジー理論におけるコサイクルを用いて定義される不変量です。ハンドル体結び目のバイカンドルコサイクル不変量を構成するために、多重共役バイカンドルの(コ)ホモロジー理論を構築し、コサイクルを探すことは研究の目的の一つでした。

3. 研究の方法

(1) 多重共役バイカンドル

バイカンドルの公理は、結び目に対するライデマイスター変形に対応して得られます。ハンドル体結び目に対しても、同様にライデマイスター変形を公理化して代数を得るのが基本的な方法です。しかし、原始的な公理化は代数の構造を明らかにしたものではありませんので、この構造を明らかにして代数を定義する必要があります。

(2) (コ)ホモロジー理論の構築

頂点の重みにも対応した多重共役バイカンドルの(コ)ホモロジー理論は、バイカンドルの(コ)ホモロジー理論と多重共役カンドルの(コ)ホモロジー理論の一般化として展開されるべきものであり、両理論を融合させ

ることを目指しました。

4. 研究成果

(1) 多重共役バイカンドル

部分的に群の構造を持ったバイカンドルである多重共役バイカンドルを定義し、その構造を解明しました。また、バイカンドルを平行化することで、任意のバイカンドルから多重共役バイカンドルを構成しました。

(2) (コ)ホモロジー理論の構築

多重共役バイカンドルの(コ)ホモロジー理論を構築しました。また、バイカンドルのコサイクルから多重共役バイカンドルのコサイクルを構成する方法を確立しました。

これらの研究は Masahide Iwakiri 氏、Seiichi Kamada 氏、Jieon Kim 氏、Shosaku Matsuzaki 氏、Kanao Oshiro 氏との共同研究です。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Atsushi Ishii, Masahide Iwakiri, Seiichi Kamada, Jieon Kim, Shosaku Matsuzaki, Kanao Oshiro, A multiple conjugation biquandle and handlebody-links, Hiroshima Math. J. 48 査読有 (2018), no. 1, 89--117.
<https://www.projecteuclid.org/euclid.hmj/1520478026>

Atsushi Ishii and Sam Nelson, Partially multiplicative biquandles and handlebody-knots, Contemp. Math. 689 査読有 (2017) 159--176.
DOI: 10.1090/conm/689/13846

Scott Carter, Atsushi Ishii, Masahico Saito and Kokoro Tanaka, Homology for quandles with partial group operations, Pacific J. Math. 287-1 査読有 (2017), 19--48.
DOI: 10.2140/pjm.2017.287.19

Atsushi Ishii, The Markov theorems for spatial graphs and handlebody-knots with Y-orientations, Internat. J. Math. 26 査読有 (2015), 1550116, 23 pp.

DOI: 10.1142/S0129167X15501165

Atsushi Ishii, A multiple conjugation quandle and handlebody-knots, Topology Appl. 196 査読有 (2015), 492--500.
DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.029

Atsushi Ishii, Kengo Kishimoto and Makoto Ozawa, Knotted handle decomposing spheres for handlebody-knots, J. Math. Soc. Japan 67 査読有 (2015), 407--417.
DOI: 10.2969/jmsj/06710407

[学会発表](計11件)

Atsushi Ishii, Quandle twisted Alexander invariants, 結び目の代数と幾何, 早稲田大学(東京都新宿区), 2018.3.9

Atsushi Ishii, An augmented Alexander matrix and an affine extension of a quandle, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2018, 広島大学(広島県東広島市), 2018.3.6

Atsushi Ishii, Generalizations of twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants, トポロジー火曜セミナー, 東京大学(東京都目黒区), 2017.10.17

Atsushi Ishii, Quandle extensions and generalized twisted Alexander invariants, ハンドル体結び目とその周辺 10・Hurwitz action 7, 筑波大学(茨城県つくば市), 2017.10.9

Atsushi Ishii, On augmented Alexander matrices, Friday Seminar on Knot Theory, 大阪市立大学(大阪府大阪市), 2017.1.27

Atsushi Ishii, 拡張アレキサンダー行列と(ねじれ)アレキサンダー多項式・カンドルコサイクル不変量の一般化, 東京女子大学トポロジーセミナー, 東京女子大学(東京都杉並区), 2016.12.10

Atsushi Ishii, Parallel biquandle colorings for handlebody-knots and spatial graphs, International Workshop on Spatial Graphs 2016, 早稲田大学(東京都新宿区), 2016.8.3

Atsushi Ishii, The products of Alexander invariants and quandle cocycle invariants, 結び目の数学 VIII, 早稲田大学(東京都新宿区), 2015.12.25

Atsushi Ishii, The Markov theorem for spatial graphs and handlebody-knots, Special Session on Spatial Graphs, AMS Sectional Meeting, California State University, Fullerton, California, USA, 2015.10.24

Atsushi Ishii, Group, quandle, and mixed (co)homologies, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学(京都府京都市), 2015.9.13

Atsushi Ishii, Questions on handlebody-knot theory, 拡大 KOOK セミナー-2015, 神戸大学(兵庫県神戸市), 2015.8.18

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~aishii/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 敦 (ISHII ATSUSHI)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：00531451