

令和元年5月29日現在

機関番号：12605
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2015～2018
課題番号：15K04868
研究課題名(和文) 双曲多様体に対するトーシオン不変量の研究

研究課題名(英文) Torsion invariants for hyperbolic manifolds

研究代表者

合田 洋 (Goda, Hiroshi)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60266913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：双曲結び目群 G はホロノミー表現と呼ばれる $PSL(2, \mathbb{C})$ への表現をもつ。本研究ではこの表現を n 次元既約表現に拡張した表現 $G \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ に注目しこの表現に付随したねじれアレキサンダー多項式の研究を行った。8の字結び目とホワイトヘッド絡み目に対するこのねじれアレキサンダー多項式の具体的計算を行い、それに基づきねじれアレキサンダー多項式を用いた双曲結び目補空間の体積公式を得ることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

体積は幾何学において極めて重要な基本概念であり、アレキサンダー多項式は結び目理論において最も重要だと考えられる結び目の多項式不変量である。ねじれアレキサンダー多項式はアレキサンダー多項式を精密な形に拡張したものであり、本研究にて得られたねじれアレキサンダー多項式を用いて双曲結び目補空間の体積を記述する明示公式は結び目研究の歴史に残る公式である。

研究成果の概要(英文)：A hyperbolic knot group G has a representation to $PSL(2, \mathbb{C})$, which is called holonomy representation. We focused on a representation $G \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ obtained from the holonomy representation by the extension, and then we studied the twisted Alexander polynomials associated with the representation.

We have calculated the twisted Alexander polynomials for the figure eight knot and the Whitehead link. Using the results, we have obtained a formula of the volume of a hyperbolic link complement using the twisted Alexander polynomial.

研究分野：幾何学

キーワード：ねじれアレキサンダー多項式 結び目 体積

1. 研究開始当初の背景

1970年代のサーストンの研究により3次元多様体の研究において双曲幾何は重要な役割を果たすことが示唆され、実際に双曲幾何を用いて様々な方向に研究が発展してきた。2003年にはペレルマンによってサーストンによる幾何化予想が正しいことが示され、3次元多様体論において双曲幾何が支配する範囲がとて広範であることが明確になった。

一方、ライデマイスタートーションはライデマイスターによって導入された simple ホモトピー不変量であり、結び目理論で長年にわたって重要な役割を果たしているアレキサンダー多項式もライデマイスタートーションの一種であることがミルナーによって証明されている。アレキサンダー多項式に結び目群の表現を付随させて構成されたものがねじれアレキサンダー多項式であり、ある条件下(チェーン複体がacyclic)においてこれもライデマイスタートーションの一種であることが知られている。

1990年代後半からacyclicでないチェーン複体に対するライデマイスタートーションの研究が進められ、特に基本群の表現 $G \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ にその随伴表現を合成して得られる表現に対するライデマイスタートーションやその表現を n 次元既約表現に拡張した表現 $G \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ に対するライデマイスタートーションが研究された。特に前者については山口によりacyclicでないチェーン複体についてもねじれアレキサンダー多項式とこのライデマイスタートーションの関係式が明示され、後者についてはPori達によりこの表現 $G \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の表現に付随したライデマイスタートーションの漸近挙動を観察することでその主要項が双曲多様体の体積に収束することが判明していた。

2. 研究の目的

表現 $G \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の表現に付随したねじれアレキサンダー多項式について、(1) 具体的計算を行う、(2) 結び目補空間の体積を表示する、(3) ファイバー2橋結び目の群に対する character variety を幾何学的に記述する、(4) その他のトーション不変量やゼータ関数の関係を解明する、ことが本研究の目的であった。

3. 研究の方法

初年度は本研究に必要な専門的知識を得るために書籍、論文、特に研究代表者にとっては未習であった複素幾何および表現論の専門書を購入し集中的に読んだ。同時に8の字結び目やWhitehead link に対するねじれアレキサンダー多項式の計算をコンピュータ計算ソフト(Mathematica および MatLab) を使って行った。これは研究目的の(1)に対応する。初年度後半から山口、Porti 達による先行研究を精査し必要な考察・証明を行い、ねじれアレキサンダー多項式を使った結び目補空間の体積公式を得た。これは研究目的の(2)に対応する。2年目にはこの結果を様々な研究集会で発表しレビューを受けた。研究協力者の方々との議論、特に山口祥司氏が所属される秋田大学へ出張し行った議論は極めて有益だった。さらに3年目にはスペイン、バルセロナのバルセロナ自治大学に所属される Porti 教授を訪問し、本結果の報告と今後の研究の展開について議論したのは今後の発展も含めて役に立った。論文執筆を進める一方で3年目後半からは幾何学的ゼータ関数に関する勉強を始めた。これは研究目的の(4)に対応する。特に Muller の論文を通読し本研究に関わる部分に関するサーベイレクチャーを最終年の10月18日早稲田大学にて、12月9日に奈良女子大学で行った。研究代表者は所属する東京農工大学にて「農工大セミナー」を運営している。本研究期間に国内外の専門家の方達から6日間計13件の研究発表を行って頂き専門的知識の提供を受けた。

4. 研究成果

双曲結び目群 G はホロノミー表現と呼ばれる $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ への表現をもつ。本研究ではこの表現を n 次元既約表現に拡張した表現 $G \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ に注目し、8の字結び目とホワイトヘッド絡み目に対するこの表現に付随するねじれアレキサンダー多項式の具体的計算を行った。

そして、チェーン複体がacyclicでない場合を考察した山口の方法をPorti 達の結果に適用し、ねじれアレキサンダー多項式を用いた双曲結び目補空間の体積公式を得ることに成功した。

続いてこれらの結果を絡み目の場合に拡張した。

ねじれアレキサンダー多項式のゼータ関数表示を探索し、現在、グラフの行列重み付きゼータ関数というゼータ関数による表示が可能であるという知見を得たと考えている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

[Hiroshi Goda](#), Lifts of holonomy representations and the volume of a knot complement, RIMS Kokyuroku, 2052, 2017, 109—120, 査読無。

[倉田洋](#), 結び目の体積とアレキサンダー多項式, 第64回トポロジーシンポジウム講演集, 64, 2017, 43—52, 査読無。

[Hiroshi Goda](#), Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, 93, 2017, 61—66, 査読有。

[Hiroshi Goda](#), Monodromy maps of fibered 2-bridge knots as elements in automorphism groups of free groups, Kyungpook Mathematical Journal, 56, 2016, 927—938, 査読有。

〔学会発表〕(計12件)

倉田洋, ねじれアレキサンダー多項式と伊原ゼータ関数, Seminar on Geometric Topology of dimension 3, 2019年3月9日, 日本大学文理学部.

倉田洋, ねじれアレキサンダー多項式と伊原ゼータ関数, 大阪電気通信大学トポロジーセミナー研究会「低次元多様体の幾何的性質と不変量の研究」, 2019年2月4日, 大阪電気通信大学.

倉田洋, 双曲結び目体積と多項式不変量, 奈良女子大学トポロジーセミナー, 2018年12月9日, 奈良女子大学.

倉田洋, セルバーグ跡公式から結び目体積公式へ, ハンドル体結び目とその周辺 11, 2018年10月21日, 早稲田大学.

倉田洋, A property of the Alexander polynomial and the Chern Simons invariant, 群馬トポロジーセミナー, 2018年2月7日, 高崎イノウエビル 第1会議室.

倉田洋, 結び目の体積とアレキサンダー多項式, 第64回トポロジーシンポジウム, 2017年8月22日, 東海大学高輪キャンパス.

倉田洋, Lifts of holonomy representations and the volume of a link complement, 研究集会 Intelligence of Low-dimensional Topology, 2017年5月26日, 京都大学数理解析研究所.

Hiroshi Goda, Twisted Alexander invariants and Hyperbolic volume of knots, 火曜トポロジーセミナー, 2017年5月16日, 東京大学数理科学研究科.

Hiroshi Goda, Twisted Alexander invariants and Hyperbolic volume of knots and links, Geometry Seminar, 2017年4月25日, Universitat Autònoma de Barcelona.

Hiroshi Goda, Twisted Alexander invariants and Hyperbolic volume of knots, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics, 2017年2月16日, 東京大学大学院数理科学研究科.

倉田洋, Lifts of holonomy representations and the volume of a link complement, 東北結び目セミナー2016, 2016年10月16日, 東北大学片平キャンパス.

倉田洋, ねじれアレキサンダー多項式と双曲体積, 拡大 KOOK セミナー2016, 2016年8月23日, 大阪電気通信大学寝屋川キャンパス.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：北野 晃朗

ローマ字氏名：KITANO TERUAKI

所属研究機関名：創価大学

部局名：理工学部

職名：教授

研究者番号（8桁）：90272658

研究協力者氏名：森藤 孝之

ローマ字氏名：MORIFUJI TAKAYUKI

所属研究機関名：慶應義塾大学

部局名：経済学部

職名：教授

研究者番号（8桁）：90334466

研究協力者氏名：山口 祥司

ローマ字氏名：YAMAGUCHI YOSHIKAZU

所属研究機関名：秋田大学

部局名：教育文化学部

職名：准教授

研究者番号（8桁）：30534044

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。