3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１３１０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｋ０４８６９
研究課題名（和文）曲面に付随する無限複体を用いた３次元多様体の研究

研究課題名（英文）Research on 3-manifolds by using infinite complexes associated with surfaces

研究代表者
斎藤　敏夫（Saito, Toshio）

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：９０３９７６７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：３次元多様体に対する位相構造および幾何構造の解明は当該分野において喫緊の課題のひとつである。本研究では３次元多様体の構造と深い関係にある曲面に着目した。当該曲面に付随する無限複体を構築し，多様体の位相的および幾何的性質を特徴づけるに相応しい尺度を導入することにより，３次元多様体のさまざまな構造に対する特徴づけを行うこと，および３次元多様体内の曲面に導入されている既存概念に纏わる詳細な分析を行うことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
曲面に付随する無限複体を用いることにより，「良い性質」を保証するための条件に対する乖離の度合いを細かく計ることが可能となった。すなわち，一般には無限個のクラスを用意することができ，その条件に纏わる詳細な考察を行うことを可能とした。この点が従来とは大きく異なり，３次元多様体内の曲面に対する幾つかの概念に対する先入観の再考を促すきっかけを与えることができた。

研究成果の概要（英文）：Investigation on topological and geometrical properties of 3-manifolds is one of the important matters in low dimensional topology. In this research, I focused on surfaces which have strong links with the structure of 3-manifolds. Considering proper criteria with topological and geometrical properties of 3-manifolds, I characterized a part of the structure of 3-manifolds and gave new thought on topological properties of surfaces in 3-manifolds.

研究分野：３次元多様体論

キーワード：３次元多様体　無限腹帯　Heegaard分解　フロースパイン　結び目　デーン手術　タングル

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

３次元多様体研究において，その中にある曲面が重要な役割を果たすことは良く知られた事実であろう．たとえば，任意の３次元(有向)閉多様体にはヘガード曲面とよばれるものが存在して，その曲面に沿って多様体を切り開くと２つのハンドル体に分解できる．ヘガード曲面を用いた３次元多様体研究は 1960 年代から急速に発展し，現在も活発に研究が行われている．特に，Hempel は閉曲面に付随する curve complex とよばれる無限複体を用いることで，ヘガード曲面に対して複雑さの度合いを表す尺度を(既存概念の拡張として)導入した．さらには，それを用いて３次元多様体の幾何的性質を見事に特徴づけることで，曲面に付随する無限複体の有用性を当該分野に一気に知らしめることとなった．この Hempel の先駆的研究が起爆剤となり，米国を中心として世界中の多くの研究者が曲面に付随するさまざまな無限複体を用いた３次元多様体研究に取り組むようになる．たとえば，Johnson はヘガード曲面に付随する dual curve complex や pants complex を用いることで３次元多様体の位相不変量を得ている．また，Brock-Souto は pants complex を利用して導入した尺度が双曲体積と比較可能であると公表している．

一方，研究代表者はあるクラスの結び目の橋分解曲面に対して curve complex を用いることで複雑度の概念を導入し，結び目の幾何的性質を特徴づけることに成功した．その後，Tomova によりすべての橋分解曲面,さらにはタングル分解曲面にまで複雑度の概念が拡張されている．また，Zupan は先に述べた Johnson の手法を橋分解曲面に応用させることで得た結び目の不変量を用いて，双曲的２橋結び目の体積に関する評価式を与えている．このように，曲面に付随する無限複体は結び目の研究においても有用であることが明らかになっている．

さらに,このような研究手法はヘガード理論の枠を超えてさまざまな曲面に適用されている．たとえば，研究代表者は山本亮介氏(群馬大学)との共同研究により，３次元多様体のオープンブック分解曲面に付随する arc complex とよばれる無限複体を用いることで，その位相的性質の特徴づけを行った．また，圧縮不可能という条件を満たす閉曲面も３次元多様体の諸性質を反映する重要な曲面である．一方で，圧縮可能曲面はそれほど重要視されていないが，Bachman は圧縮可能曲面に付随する disk complex を用いることで topological index なる概念を導入した．この概念は，大雑把に述べると，圧縮不可能性からどれだけ離れているかを表す指標となっている. 結果として，(驚くべきことに) これまで圧縮不可能曲面がもつ特有の利点だと思われていた幾つかの性質が，ある条件を満たす圧縮可能曲面に対しても確認されている．この結果は圧縮可能性に対する暗黙の共通認識に一石を投じていると受け取ることもできる．これを良い機会として，３次元多様体内の曲面に対するさまざまな``常識''を疑ってみることも重要であると考える．

２．研究の目的

これら一連の３次元多様体研究における共通点は，次の３点を巧みに設定することで多様体の位相的および幾何的性質の特徴付けに成功していることである．

(1) ３次元多様体の性質に影響を与える<u>曲面の選定</u>,
(2) 曲面に付随する<u>無限複体の構築</u>,
(3) 位相的および幾何的性質を特徴づけるに相応しい<u>尺度の導入</u>.

このことを踏まえて，上記３点に対して従来の組み合わせでの研究を発展させることも然ることながら，これまでに扱われていない新たな組み合わせを試みることに重点をおく．そのうえで，３次元多様体の位相構造や幾何構造に対する特徴づけを行うこと，および，３次元多様体内の曲面に対するさまざまな概念について詳細に分析することを当該期間内における研究目的とする．

３．研究の方法

これまで研究対象としてきたヘガード曲面（結び目の橋分解曲面やタングル分解曲面を含む)に対して，curve complex を用いた考察を深める．Hempel の手法ではヘガード曲面に付随する curve complex の部分複体となる disk complex が重要な鍵であったが，これを拡張して annulus-disk complex なるものを導入し，然るべき尺度を導入することで多様体の幾何的性質を特徴づけられると考えている． また，やや挑戦的な方法として，ヘガード曲面に付随し，かつ，多様体の情報をさらに引き出す未知の無限複体を探究する．たとえば，Masur-Minsky により導入された階層(部分曲面に付随する curve complex)を参考にするのも有効であると考える．また，無限複体の頂点は curve complex と同様としながらも，1-単体の張り方を異にすること

でまったく新しい構造をもった無限複体が得られ，例外的デーン手術に関する研究に適した複体が構築できるという感触を得ている．

ヘガード曲面の可約性と弱可約性といった概念に纏わる詳細な考察については，強既約性からの乖離の度合いを表す尺度を導入する． (a) 可約性に関する研究では disk complex の連結性に着目した尺度を導入することで比較的容易に目的を達成できると考える．また，(b) 弱可約性に関する研究では一般ヘガード曲面（多様体内に埋め込まれた然るべき条件を満たす曲面の非交和）を扱うのが自然であろう．この場合，尺度は単なる非負整数値ではなく，それらの有限集合とする案が現状としては有力候補になる．これらの概念を確立することで，弱可約性という概念に対して斬新な解釈を与える．

また，これまで扱われていない新たな組み合わせも試みる．たとえば，先述の Bachman による先行研究結果を踏まえると，結び目の外部空間にある曲面に対して定義される「メリディアン的圧縮(不)可能性」については早急に再考する価値のある概念であろう．本研究には Tomova が導入した c-disk という円板が重要な役割を演じるため，従来の disk complex の拡張として c-disk complex なる複体を採用することで，「メリディアン的圧縮(不)可能性」に纏わる詳細な分析を行うことで先入観を再考する．

次に，３次元多様体の位相的および幾何的性質に影響を与える重要な曲面の１つとして，結び目・絡み目のザイフェルト曲面を挙げる．特に，標準的ザイフェルト曲面の拡張として得られるステイト曲面は双曲構造との密接な関係が指摘されており，３次元多様体論においても重要な研究対象となっている．本研究にあたっては研究代表者と山本亮介氏(群馬大学)による研究が布石となると考えている．実際，当該先行研究ではオープンブック分解曲面に付随する無限複体として arc complex を採用することで一定の成果を上げることができた．ザイフェルト曲面に対しても同様の複体かあるいは arc and curve complex とよばれる複体が第一候補として相応しいであろう．挑戦的ではあるが，ステイト曲面の構成方法に則した新たな無限複体が構築できれば，３次元多様体の双曲構造をより綺麗に特徴づけられると思われる．

さらに，上述の研究方法により確立された技術を基盤として，はめ込まれた曲面や分岐曲面を取り扱うことも計画している．特に，分岐曲面は３次元多様体の接触構造，葉層構造や位相不変量などと密接な関係にあり，当該期間において積極的に考察すべき対象であると考える．分岐曲面に付随する適切な無限複体の構築は容易でないかもしれないが，やはり Bachman による先行研究に鑑みて，分岐曲面に対しても既に導入されている「圧縮(不)可能性」の概念を巧く取り込むことが突破口になるのではないかと期待している．

４．研究成果

(1) ３以上である任意の自然数 n に対して，本質的自由タングルが入れ子になっているような n 糸タングルを構成した．応用として，本質的な n 糸自由タングル分解をもつ結び目で，(2n-3) 個の異なる本質的タングル球面を許容するようなものの具体例を構成することに成功した．本結果は，「本質的な２糸自由タングル分解をもつ結び目の本質的タングル球面は一意的である」という小沢誠氏(駒澤大学)により得られていた定理が一般には成立しないことを示している．

(2) 「タングルのトンネル数」の概念を(g,n)-タングルに拡張し，結び目のトンネル数と一般タングル分解により得られる一般タングルのトンネル数に関する基本公式を得た．これは研究代表者による先行研究(J. Math. Soc.Japan 66, 1303-1313)の一般化に相当するもので，実に自然な拡張となっている．さらに，上述の基本不等式における等号成立の可否についての研究を行うことにより，研究代表者による先行研究(Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 165, 541-548)の結果を，一般タングル分解の場合に拡張した結果を得ることに成功した．すなわち，任意の自然数 g，２以上の整数 n，非負整数 t_1，t_2 に対して，次の等式を満たす，結び目Ｋとその (g,n)-タングル分解 T_1∪T_2 が存在する：tnl(T_1)=t_1，tnl(T_2)=t_2，tnl(K)=tnl(T_1)+tnl(T_2)+g+2n-1．このことにより，複雑な構造をもった一般タングルの和により得られる結び目のトンネル数はまったく減衰しないことを確認することができた．

(3) 小林毅氏(奈良女子大学)と Qiu 氏(華東師範大学)との共著論文(Math. Ann. 341, 707-715)における議論を精査することにより，次が成立することを証明した：分離的圧縮不可能曲面Ｆを許容する３次元閉多様体Ｍに対して，Ｍの Heegaard 曲面Ｓが Hempel 距離４以上であれば，ＳとＦの共通部分に沿ってＳを切り開くことにより得られる曲面は(ＭをＦによって切り開いた連結成分において)圧縮不可能である．このことは，「十分に複雑な Heegaard 曲面が圧縮不可能曲面のように振る舞う」という認識をより高めた結果ともいえる．

(4) 矯飾的手術予想の解決へ向けて市原一裕氏(日本大学)と共同研究を行った．コンウェイ表

示[2x,2-2x,2x,2,-2x]（ただし，xは２以上の自然数)で表される２橋結び目のデーン手術により得られるホモロジー３-球面は互いに異なることを証明した．本結果の証明にあたっては，キャッソン不変量，τ不変量，ヒーガード-フレアホモロジーにおける補正項といった不変量では不十分であったが，SL(2,C)キャッソン不変量を用いることで成功した．また，良い性質を有するダブルツイスト結び目族に対して，デーン手術で得られる３次元多様体の SL(2,C)不変量を調べることにより，当該不変量がある意味で有効に機能することを確認することができた．さらに，伊藤哲也氏(京都大学)も新たに加わった共同研究においては，Casson 不変量および SL(2,C) Casson 不変量を用いることにより，主に次の結果を得た：正二橋結び目Ｋの Alexander 多項式が１の冪根を解として持たないならば，Ｋは対掌矯飾的手術を持たない．また，種数１の二橋結び目における対掌矯飾的手術を決定した．

(5) 曲面の criticality という概念が Bachman によって導入されている．このような性質をもつ曲面は弱可約であるにもかかわらず，強既約的な特徴をも持ち合わせている興味深いものである．曲面の criticality の定義は，曲面の両側にある円板集合の分割によってなされている．本研究では，このような円板集合の極端に偏った分割(極小分割)がもつ特徴を記述するとともに，極小分割を許容する critical 曲面の具体例を見つけることに成功した．以上は，李正勲(Lee,Jung Hoon)氏(全北大学，韓国)と共同研究の成果である．

(6) ３次元多様体をフロースパインで切り開いて得られる３次元球体を考える．その境界の貼合写像から多様体の情報をすべて含むような仮想結び目図式を得ることができる．さらに，多様体の同相性を仮想結び目図式の局所変形で記述することができる．これらの事実をもとに，仮想結び目図式のカンドル彩色とよばれる概念のアイデアを応用することにより，初等的ではあるものの非自明な不変量を構成することに成功した．本研究は石井一平氏，中村拓司氏(大阪電気通信大学) との共同研究による成果である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Toshio Saito	４．巻 165
２．論文標題 High distance tangles and tunnel number of knots	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.	６．最初と最後の頁 541-548
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1017/S0305004117000652	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

１．著者名 Toshio Saito	４．巻 56
２．論文標題 Bicompressible surfaces and incompressible surfaces	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Bull. Korean Math. Soc.	６．最初と最後の頁 515-520
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

１．著者名 Kazuhiro Ichihara and Toshio Saito	４．巻 48
２．論文標題 Cosmetic surgery and the SL(2,C) Casson invariant for two-bridge knots	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Hiroshima Math. J.	６．最初と最後の頁 21-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

１．著者名 Toshio Saito	４．巻 4
２．論文標題 Examples of nested essential free tangles	５．発行年 2016年
３．雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216516500206	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　3件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 斎藤 敏夫
2．発表標題 Tunnel number of knots and generalized tangles
3．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4．発表年 2018年

1．発表者名 斎藤 敏夫
2．発表標題 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds
3．学会等名 Tunnel number of knots and generalized tangles（招待講演）
4．発表年 2018年

1．発表者名 斎藤 敏夫
2．発表標題 An approach to defining Hempel distance of generalized Heegaard splittings
3．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4．発表年 2017年

1．発表者名 斎藤 敏夫
2．発表標題 High distance tangles and tunnel number of knots
3．学会等名 2016 International Conference of the Honam Mathematical Society（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

１．発表者名 斎藤 敏夫
２．発表標題 High distance tangles and tunnel number of knots
３．学会等名 拡大KOOKセミナー2015（招待講演）
４．発表年 2015年

〔図書〕　計1件

１．著者名 M. Scharlemann, J. Schultens and T. Saito	４．発行年 2016年
２．出版社 World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.	５．総ページ数 138
３．書名 Lecture notes on generalized Heegaard splittings	

〔産業財産権〕

〔その他〕

斎藤 敏夫（さいとう としお） http://www.juen.ac.jp/math/saito/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考