2版

様 式 C−19、F−19−1、Z−19 (共通)

科学研究費助成事業　研究成果報告書

令和 元 年 6 月 10 日現在

機関番号：13903
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：15K04872

研究課題名（和文）Isogeny的ホモトピー論とその幾何および導来代数幾何への応用

研究課題名（英文）isogenic homotopy theory and its applications to geometry and derived algebraic geometry

研究代表者
南 範彦（Minami, Norihiko）
名古屋工業大学・工学（系）研究科（研究院）・教授
研究者番号：80166090

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：古典的(安定)ホモトピー論は，その幾何的考察を多項式の共通零点と多項式写像に特化した，代数幾何のMorel-Voevodsky A1-(安定)ホモトピー論に完全に含まれてしまうことが判明しました．代数幾何のA1-(安定)ホモトピー論においても古典的(安定)ホモトピー論のHopkins-Smithのような階層構造を探す試みの中，高次単線織構造に関係する階層構造に関する，予期せぬ大変興味深い結果を得ました．ここで高次単線織構造とは，大雑把にいって考察している代数幾何的対象の各点を何本かの独立した直線を通す構造で，曲面で各点を通る直線が必ず(一本）有るものは線織面と呼ばれ，建築にも見られるものです．

研究成果の学術的意義や社会的意義
考察の対象が複雑な場合，適当な同値関係を導入して考察の対象を簡単なものにすることは，日常生活でも良く行います．このような操作を抽象的に研究するのがホモトピー論ですが，より直観的な幾何的に展開しても納得できる意味で同値であることがGrothendieck,Kanらにより知られています．そして，Hopkins-Smithらにより，幾何的対象の客観的データを与えるコホモロジー論というものを用いて，更なる同一視を要請した安定ホモトピー論において，有る階層構造が得られました．本研究は，このような古典的ホモトピー論を含むA1(安定)ホモトピー論への大域的性質への応用と，代数幾何自身への応用が期待されます．

研究成果の概要（英文）：Classical (stable) homotopy theory is now known to be subsumed by the Morel-Voevodsky A1-(stable)homotopy theory, which originates in algebraic geometr, which deals with common zeros of polynomials and polynomial maps between them. In search of some hierachy structure in the algebr-geometrically origined A1-(stable)homotopy theory, such as the Hopkins-Smith hierachy structure in the classical (stable) homotopy theory, I obtanied some unexpected very interesting results concerning some hierachy structures about higher uniruledness structure. Here, higher uniruledness structure is, roughly speaking ,
represents how many independent lines are passing through each point of a given algebro-geometric object. Surfaces whose arbitrary point is contained in at least one line are called ruled surfaces, and are sometimes found in architecture also.

研究分野：(モチビック)ホモトピー論

キーワード：代数幾何　モチビックホモトピー論　ホモトピー論　高次単線織性　高次ファノ多様体

1. 研究開始当初の背景

(1) 古典的安定ホモトピー論に於いては，1980 年代に Hopkins-Smith に Morava K 理論を用いた Bousfield class の美しい階層構造が発見され，安定ホモトピー論の多くの大域的性質が見通しよく説明出来るようになっていた．

(2) しかしながら，研究代表者が提唱続けてきた「新世界最後の日予想」のように，Hopkins-Smith の構築した Bousfield class の階層構造を用いても何も進展の得られない，安定ホモトピー論の大域的性質に関わる重要な問題もまだまだ存在する..

(3) 　こうした中，1990 年代後半に，Voevodsky と Morel によって，Voevodsky の Milnor 予想と Bloch-Kato 予想の解決の過程に於いて構築された代数幾何の「（安定）ホモトピー論」である $\mathbb{A}^1$-（安定）ホモトピー論は,（少なくとも基礎体 k が複素数体の部分体の場合には）古典的 (安定) ホモトピー論の情報を完全に含んでいることが判明した．

2. 研究の目的

(1) 代数幾何の $\mathbb{A}^1$-安定ホモトピー論に於いて，古典的安定ホモトピー論の Bousfield class の美しい階層構造　と同様のもので，真に代数幾何由来のものを構築する．

(2) 将来的には,（1）を用いて，代数幾何の $\mathbb{A}^1$-安定ホモトピー論の理解を深める．また，基礎体 k が複素数体の部分体の場合の $\mathbb{A}^1$-安定ホモトピー論において（1）で得られた大域的性質知見を，古典的 (安定) ホモトピー論の研究に応用する．

(3) (（1）と関連して，) 代数幾何における意味のある階層構造を研究する．

3. 研究の方法

(1) 研究当初は，研究代表者が既に得ていた，Beilinson が Hodge 理論の研究の過程で得た古典的ホモトピー論の一般化と解釈出来る Isogeny 的ホモトピー論の改良を「２．研究の目的（１)」の切り口にともくらんでいた．しかしながら，研究開始後間もなくして，これだけでは 代数幾何の $\mathbb{A}^1$-安定ホモトピー論に関する深い知見は得られないのではないかと思うようになった．折しも 2015 年の夏に，L^2-理論を駆使した複素解析幾何の権威である名大多元の大澤健夫氏らと,「Bousfield class は集合をなす」という大川の定理を中心として国際会議を開催し，その主要講演と関連数学の招待投稿論文（これらの選択には MIT の Haynes Miller 教授の助けを大いに受けた）からなる Ohkawa Proceedings を，大澤健夫と研究代表者の共同編著で，Springer から出版予定となった（今年末には出版予定）．この編著過程で，招待投稿論文執筆者の Ruth Joachmi 氏の $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論における Hopkins-Smith の類似への試みを知り，大いに啓発を受けた．ただ，ここでの構成は古典的安定ホモトピー論の Hopkins-Smith の結果を $\mathbb{A}^1$-安定ホモトピー論に持ち上げた構成なので，どうしても限界が見受けられた．インプットが古典的ホモトピー論の範疇の視野の狭い技術だけに頼っていただけではだめだと確信し，新しい視野からのアプローチとして，代数幾何のホモトピー論を用いた一般化である導来代数幾何等にも，その可能性を必死て求めた．2015 年から 2016 年にかけては，導来代数幾何的考えで量子場の理論をより厳密に展開した Costello-Gwilliams の仕事等にもそのようなヒントは無いかとも思った，そのために，このような数学について一生懸命勉強して，高知大学や岡山理科大学での研究集会で勉強した内容を紹介し，参加者からのフィードバックを得た．ひょっとしたら予期せぬ手掛かりが得られるのではと，モ

チーフ，整数論，代数幾何，物理等の勉強会，研究集会にも，可能性を感じれば積極的に参加した．しかしながら，それでもなかなか，代数幾何の $\mathbb{A}^1$-安定ホモトピー論に関する深い知見を生み出し得る切り口となるように感じられるものは見つからなかった...

(2) そのような折，2017 年 9 月に山形大学で開催された日本数学会秋季会代数学分科会で，鈴木拓氏の高次ファノ多様体に関する講演を偶然目にし，接束のチャーン類たちの定める数値的条件から，ファノ多様体たちに対する代数幾何的により興味のある階層構造が得られる可能性があることを知り，これこそが研究代表者が探し求めていた切り口ではないかと，大変興奮した．実は鈴木拓氏の講演ではまだベルヌーイ数に関わる予想が未解決だったのだが，この技術的な問題はすぐに解決出来た．そこでその段階で論文にしようかと思ったのだが，その代数幾何的意味を学習するにつれて不満を感じるようになり，なかなか論文に出来ずにいた．しかしながら，研究代表者の，これこそが探し求めていた切り口となり得るだろう，という信念は変わらなかった．そこで，このことをより一層深めようと一生懸命勉強して，高知大学や日本数学会代数学分科会でことについて講演し，参加者からのフィードバックを得，また代数幾何学関係の研究集会に積極的に参加し，この切り口からの進展をより豊かなものにする端緒がないか，必死で探した．

(3) 打開の鍵は何と，研究代表者が長年にわたり参加してきた変換群論関係の研究集会で幾度も関連講演を聞き自らも講演したことのあるボット塔に有った．これにより接束のチャーン類たちの定める数値的条件によって定義される高次ファノ多様体としての階層構造が，古典的代数幾何学における極めて基本的な概念である，uniruledness と unirationality との間を階層づける「高次単線織性」というべき自然な階層構造を導くことがわかった．そこで，これについて 2019 年 3 月に中央大学セミナーで，このような数学の権威宮岡洋一先生の前で，講演させて頂き，大いに刺激と励ましを受けた．

(4) こうして得られた結果の美しさ，そして証明に用いられる数学の深さに関しては，絶対的な自信を持ったが，高次ファノ多様体を定義する接束のチャーン類たちの定める数値的条件が余りにも強すぎて（このことが代数幾何学の専門家の間で高次ファノ多様体に参入する研究者が余り多くないことの一番の理由のようである），適用例が少ないことに大変困った．他の方が聞かれたら傲慢に聞こえるだろうが，こんな深い数学をしているのだからもっと役立つ結果が得られるはずだと思った．そんな折，出発点を森重文氏の有名な，「ファノ多様体なら uniruled」という定理から，これを一般化させた 宮岡一森　の定理を究極にした Boucksom-Demailly-Paun-Peternell の「projecctive manifold X が uniruled $\iff$ K_X は pseudo-effective でない.」を出発点にして，それに加えてある種の工夫をすると，より多くの例が得られることに気付いた．この Boucksom-Demailly-Paun-Peternel の定理の証明には，Ohkawa proceedings で共編著となっている大澤健夫氏の，大澤一竹腰 L^2-拡張定理が用いられており，運命を感じた．

4. 研究成果

(1) 先ず，古典的代数幾何で，誰でも思いつく基本的な概念なのに，何故か殆ど考えられて来なく，名前すら与えられてこなかった階層構造を，定義しよう：

For a projective n-dimensional variety X, and $1 \leq k \leq n$, let us say:

X is *uni-k-ruled* or $=$ *uni-*$(k-n)$*-rational*
(resp. *k-ruled* or $= -(n-k)$*-rational*),

if there exist a $(n-k)$-dimensional Z^{n-k} and a rational dominant (resp. birational) map

$$\mathbb{P}^k \times Z^{n-k} - - > X,$$

定義より以下の階層構造が従うことに注意しよう：

$$\begin{tikzcd}
\text{rational} \arrow[r, equal] \arrow[d, Rightarrow] & \text{0-rational} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & -(n-k)\text{-rational}= k\text{-ruled} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{1-ruled} \arrow[r, equal] \arrow[d, Rightarrow] & \text{ruled} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{unirational} \arrow[r, equal] & \text{uni-0-rational} \arrow[r, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] & \text{uni-}(k-n)\text{-rational} = \text{uni-}k\text{-ruled} \arrow[r, Rightarrow] & \cdots \arrow[r, Rightarrow] & \text{uni-1-ruled} \arrow[r, equal] & \text{uniruled}
\end{tikzcd}$$

このような基本的な階層構造が殆ど考えられて来なかったのは，この階層構造を反映するような興味深い例が余り知られて来なかったことにあると思われる.（他の可能性として，森重文氏の有名な定理によって uniruled であることが知られているファノ多様体に対しては unirational とならない例が知られていないことが考えられる.）そこでこの階層構造にある双有理性を忘れた，次のより強い条件を要求する階層構造を考える：

Fix a rational k-fold $\mathcal{R}^k$ $(1 \le l \le n)$. For a projective n-dimensional variety X, let us say:

> X is *uniregular-$\mathcal{R}^k$-ruled* (resp. *regular-$\mathcal{R}^k$-ruled*), if there exist a $(n-k)$-dimensional Z^{n-k} and a dominant (resp. birational) morphism
>
> $$\mathcal{R}^k \times Z^{n-k} \to X.$$

- Clearly,

$$\begin{tikzcd}
\text{regular-}\mathcal{R}^k\text{-ruled} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & k\text{-ruled} = -(n-k)\text{-rational} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{uniregular-}\mathcal{R}^k\text{-ruled} \arrow[r, Rightarrow] & \text{uni-}k\text{-ruled} = \text{uni-}(k-n)\text{-rational}
\end{tikzcd}$$

- (uni)regular-$\mathcal{R}^k$-ruledness' are NOT birational invariant.

さて，得られた主結果は，de Jong-Starr, Araujo-Castravet, 鈴木拓氏らの 高次 Fano 条件を含む，Boucksom-Demailly-Paun-Peternell の uniruledness criterion を出発点とした， より一般の数値的階層条件 （ この階層レベルを k で表そう． ただし少々複雑なのでここには具体的に書けない）を用いると，大雑把に言って以下のように述べられる：

主結果

> n 次元射影多様体 X のこの数値的階層レベルが k 以上ならば，適当な k 次元 ボット塔 $\mathcal{B}^k$ に関して uniregular $\mathcal{B}^k$-ruled となる：
>
> $$\mathcal{B}^k \times Z^{n-k} \to X \text{ (dominant morphism) が存在する} \qquad (1)$$
>
> 特に，X は uni-$(k-n)$-rational = uni-k-ruled となる.

(2) 伝統的に，代数幾何とトポロジーを関係づける最も重要な問題はホッジ予想である．さて，Conte-Murre が uniruled 4-fold に対して ホッジ予想を示した手法を少しだけ一般

化して，任意の uni-2-rulded 5-fold に対するホッジ予想の成立が分かる．すると，本研究の主結果 (1) は，我々の数値的階層 2 以上の 5-fold に対するホッジ予想成立を導く．

(3) (1) に於いて，

$$\text{uni-}(k-n)\text{-rational} = \text{uni-}k\text{-ruled}$$

に関する階層構造が殆ど考えられて来なかった一つの可能性として，ファノ多様体で unirational でないものが知られていないことを述べた．研究代表者がこの代数幾何学の古典的大問題に対して大きな貢献が出来るなどとは思わないが，ごく最近，名大多元の大澤健夫，小林亮一，久本智之 の各氏との議論を通して，ファノ多様体の Kahler-Ricchi 流による Gromov-Hausdorff 極限からのアプローチを得た．これは伝統的代数幾何学のアプローチでは与えられない新しい興味深い観点を与える可能性がある．

(4) 以上のように，本研究の成果は，当初目指していたホモトピー論方面というよりは，その準備段階と当初想定していた，代数幾何の当初全く予測していなかったところが中心となった．しかしながら，成果の大きさは，当初予想して計画していたよりも遥かに大きなものになったと確信する．ただじ，満足する結果が得られたのが研究機関終了間際になってしまったので，現在全力で成果を論文に執筆しているところである．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 2 件)

① 南 範彦, On higher Fano varieties - a summary, RIMS Kokyuroku, 査読無, 2098 巻，2018，8 pp.

② Norihiko Minami , A handy chart to navigate a small part of Ayoub's Thesis on Grothendieck's six operations in the motivic stable homotopy categories, RIMS Kokyuroku, 査読無, 2016 巻，2017，8–131.

〔学会発表〕 (計 49 件)

① 南 範彦, “高次 Fano 多様体”の generalized Bott tower による被覆と Hodge 予想について，中央大学セミナー，2019 年.

② 南 範彦, モチビック安定ホモトピー圏における thick イデアルに関わる問題について，高知ホモトピー論談話会，2018 年.

③ 南 範彦, ある高次 Fano 多様体の Hodge 予想へのアプローチに関して，高知ホモトピー論談話会，2018 年.

④ 南 範彦, Pfister quadric の幾つかのモチビック・一般コホモロジーについて，高知ホモトピー論談話会，2018 年.

⑤ 南 範彦, Phister quadric の unramified cohomology について，高知ホモトピー論談話会，2018 年.

⑥ 南 範彦, 高次 Fano 多様体の Bott tower による被覆について, 高知ホモトピー論談話会，2018 年.

⑦ 南 範彦, 高次 Fano 多様体の Bott tower による被覆について, 第 45 回 変換群論シンポジウム, 2018 年.

⑧ 南 範彦, Covering Higher Fano varieties by rational varieties, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会，2018 年.

⑨ 南 範彦, 高次ファノ多様体について, 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論, 京都大学数理解析研究所，2018 年.

⑩ 南 範彦, On covering by rational varieties, 日本数学会年会於東京大学駒場キャンパス，2018 年.

⑪ 南 範彦, Fano Hypersufaces, Fano Torics, Fano 3-folds, 高知ホモトピー論談話会 2017 (高知大学理学部 2 号館 6 階　数学会議室), 2017 年.

⑫ 南 範彦, Picard Group in Number Theory, Algebraic Geomtetry, and Homotopy Theory, 高知ホモトピー論談話会 2017 (高知大学理学部 2 号館 6 階　数学会議室), 2017 年.

⑬ 南 範彦, Connectedness in the A^1-homotopy theory, 高知ホモトピー論談話会 2017 (高知大学理学部 2 号館 6 階　数学会議室), 2017 年.

⑭ 南 範彦, Covering by Higher Rational Varieties, 高知ホモトピー論談話会 2017 (高知大学理学部 2 号館 6 階　数学会議室), 2017 年.

⑮ 南 範彦, Higher Fano Manofolds, 高知ホモトピー論談話会 2017 (高知大学理学部 2 号館 6 階　数学会議室), 2017 年.

⑯ 南 範彦, On covering by higher rational varieties - in search for possible applications to the Morel-Voevodsky A^1-homotopy theory, 2017 年度ホモトピー論シンポジウム (高松市生涯学習センター (まなび CAN)), 2017 年.

17. Norihiko Minami , On some positivity conditions of the Chern characters of Fano maifolds, The 44th Symposium on Transformation Groups (Fukui Phoenix Plaza (403 room)), 2017.
18. 南 範彦, Costello-Gwilliams の QFT（2），例を中心として，春の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2017 年 3 月 29〜30 日.
19. 南 範彦, Costello-Gwilliams の QFT（1），Factorization algebra の役割を中心として，春の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2017 年 3 月 29〜30 日.
20. 南 範彦, Factorization algebra（2），例を中心として，春の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2017 年 3 月 29〜30 日.
21. 南 範彦, Factorization algebra（1），定義と基礎を中心として，春の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2017 年 3 月 29〜30 日.
22. 南 範彦, Costello-Gwilliams の QFT への入門（2），理論の概要，春の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2017 年 3 月 29〜30 日.
23. 南 範彦, Costello-Gwilliams の QFT への入門（1），古典的場の理論と位相的場の理論からの動機，春の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2017 年 3 月 29〜30 日.
24. 南 範彦, ファインマン・モチーフ (Connes-Marcolli) はじめの一歩，冬の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2017 年 1 月 10 日，
25. 南 範彦, Cisinski's proof of the K-theory representability in the cdh topology, 高知ホモトピー論談話会 2016，高知大学理学部，2016 年 12 月 28 日.
26. 南 範彦, The proper base change theorem of Ayoub, Cisinski-Deglise, 高知ホモトピー論談話会 2016，高知大学理学部，2016 年 12 月 28 日.
27. 南 範彦, Ayoub's construction of $f^* + f_* + f_! + f^!$ in the motivic stable homotopy category, 高知ホモトピー論談話会 2016，高知大学理学部，2016 年 12 月 28 日.
28. 南 範彦, Ayoub's construction of $f_\# + f^* + f_*$ in the motivic stable homotopy category, 高知ホモトピー論談話会 2016，高知大学理学部，2016 年 12 月 28 日.
29. 南 範彦, Cisinski's theorem of the K-theory representability in the cdh topology, 高知ホモトピー論談話会 2016，高知大学理学部，2016 年 12 月 27 日.
30. 南 範彦, 定積分とホップ代数，冬の代数的位相幾何学セミナー，岡山理科大学，2016 年 12 月 20 日.
31. Norihiko Minami , On the Morel-Voevodsky K-theory Representability Theorem, The 43rd Symposium on Transformation Groups, Himeji Civic Hall, 2016 年 11 月 17〜19 日.
32. Norihiko Minami , From the periodic table of chemical elements to Ohkawa's theorem on the Bousfield classes in the stable homotopy category, ホモトピー論シンポジウム，県立広島大学サテライトキャンパス，2016 年 11 月 12〜14 日.
33. 南 範彦, Ayoub の，Motivic Stable Homotopy 圏における Grothendieck 6 operations の構成，の概観紹介，高知ホモトピー論小談話会 2016，高知大学理学部，2016 年 9 月 9 日.
34. 南 範彦, Motivic Stable Homotopy 圏入門，高知ホモトピー論小談話会 2016，高知大学理学部，2016 年 9 月 9 日.
35. 南 範彦, Symmetric spectra, Descent for algebraic K-theory, 八ヶ岳原村， 2016 年 9 月 1〜5 日.
36. 南 範彦, On the motivic stable homotopy groups, 新しい変換群論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 5 月 23〜26 日.
37. 南 範彦, Basics of the motivic stable homotopy category, 春の代数的位相幾何学セミナー, 岡山理科大学，2016 年 3 月 25〜26 日.
38. 南 範彦, Regulators and the Farrel-Jones conjecture in K-theory, 春の代数的位相幾何学セミナー, 岡山理科大学，2016 年 3 月 25〜26 日.
39. 南 範彦, Some calculations of the motivic stable homotopy groups and surgery related groups, 春の代数的位相幾何学セミナー, 岡山理科大学，2016 年 3 月 25〜26 日.
40. 南 範彦, A variation on the theme of periodicity - periodicity of elements in chemestry and periodicity of elliptic (co)homology - via Legendre polynomials.
高知ホモトピー論談話会 2015，高知大学理学部，2015 年 12 月 26〜27 日.
41. 南 範彦, 元素周期表の数理について - III, 高知ホモトピー論談話会 2015，高知大学理学部，2015 年 12 月 26〜27 日．高知ホモトピー論談話会 2015，高知大学理学部，2015 年 12 月 26〜27 日.
42. 南 範彦, 元素周期表の数理について - II, 高知ホモトピー論談話会 2015，高知大学理学部，2015 年 12 月 26〜27 日．高知ホモトピー論談話会 2015，高知大学理学部，2015 年 12 月 26〜27 日.
43. 南 範彦, 元素周期表の数理について - I, 高知ホモトピー論談話会 2015，高知大学理学部，2015 年 12 月 26〜27 日．高知ホモトピー論談話会 2015，高知大学理学部，2015 年 12 月 26〜27 日.
44. Norihiko Minami , Homotopy theoretical methods for rational points, The 42the Symposium on Transformation Groups, Kanazawa Workers' Plaza, 2015 年 11 月 26〜28 日.
45. 南 範彦, smooth とは限らない有限次元可換ネーター環に対する Schlichting Euler 類の，普遍的 refinement + generalization とその応用の可能性について，ホモトピー論シンポジウム，姫路・西はりま地場産業センター, 2015 年 11 月 21〜23 日.
46. Norihiko Minami , A crash course of topological materials; a homage to Ohkawa's deep insight into material science, Bousfield classes from a set : - a workshop in memory of Tetsusuke Ohkawa, Nagoya University, 2015 年 8 月 28〜30 日.
47. 南 範彦, Van der Kallen's acyclicity theorem, Workshop on Quadratic Forms, Milnor-Witt-K-theory, and the stability, 八ヶ岳原村, 2015 年 8 月 13〜16 日.
48. 南 範彦, Homotopy (co)limit, Grothendieck construction, and Quillen's theorem B, 高知ホモトピー論小談話会 2015, 高知大学医学部, 2015 年 7 月 24〜25 日.
49. Norihiko Minami , Some mathematical aspects of topological materials, New topics on transformation groups, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 5 月 25〜28 日.