

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04878

研究課題名(和文) 結び目の体積予想とポテンシャル関数

研究課題名(英文) On the volume conjecture for knots and potential functions

研究代表者

横田 佳之 (Yokota, Yoshiyuki)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：40240197

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,400,000円

研究成果の概要(和文)：結び目の体積予想とは、結び目のジョーンズ多項式の極限に、結び目の補空間の体積が現れるという予想であり、ジョーンズ多項式に代表される量子不変量の幾何的背景の謎に迫る、重要な予想です。ジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数の幾何的・解析的性質が証明の鍵となりますが、これまでの研究により、ポテンシャル関数の臨界方程式及び臨界値が、構造方程式及び体積を与えることがわかっていました。

この研究では、交代結び目の補空間の測地線の研究及び臨界方程式の解の存在証明を行うと同時に、ポテンシャル関数の高次偏導関数を用いて、結び目のA多項式を数値計算を通じて計算する手法の開発を行いました。

研究成果の概要(英文)：The volume conjecture for knots states that, for a knot in 3-sphere, the volume of its complement appears in the limit of its colored Jones polynomial. This is very important conjecture because the geometric background of quantum invariants, such as Jones polynomials, is still unclear. To prove this conjecture, we have to study the geometric and analytic properties of the potential function which appears in the integral expression of the colored Jones polynomial. In fact, it is already known that the stationary phase equations and the critical value of the potential function give the structure equations and the volume.

In this research, we study the geodesics in the complements of the alternating knots, the existence of the solution to the structure equations, and a numerical method to compute the A-polynomial by using the derivatives of the potential function.

研究分野：位相幾何学

キーワード：体積予想 ポテンシャル関数 交代結び目

1. 研究開始当初の背景

結び目・3次元多様体の研究は1984年のジョーンズ多項式の発見をきっかけに活発化し、以降、この新しい多項式不変量をめぐって発展してきました。代表的なものとして、

- ・ 村杉、カウフマンによるタイト予想の解決
- ・ ウィッテン、レシュティキン、トゥラエフによる3次元多様体の量子不変量の発見
- ・ コンツェビッチ積分を用いた、3次元多様体の有限型不変量の構成
- ・ コバノフによる、結び目のコバノフ・ホモロジーの発見

などの成果が挙げられますが、これらに並ぶ問題として注目を集めているのが、

- ・ 結び目の体積予想

すなわち、結び目のジョーンズ多項式の極限に結び目の補空間の体積が現れる、という予想で、結び目のジョーンズ多項式の漸近挙動と幾何構造の不思議な関係を示唆しています。

現在のところ、ジョーンズ多項式を含む、結び目・3次元多様体のさまざまな量子不変量は、ドリinfeld・神保らによって構築された量子群の理論に立脚した、極めて代数的なもので、一連の量子不変量に対して幾何的な定式化を与える問題は、ずっと研究者を悩ませてきました。その突破口になると期待されているのが、結び目の体積予想です。

この予想は、1994年にジュネーブ大学のカシャエフ氏が提唱した予想と、1999年に、早稲田大学の村上順氏と東北大学の村上斉氏による共同研究が結び目について定式化されました。カシャエフ氏は、古典ダイログ関数を量子化した量子ダイログ関数を使って不変量を構成し、よく知られた双曲四面体の体積と古典ダイログ関数の関係に基づいて、結び目の補空間の双曲体積と、彼が構成した不変量との関係を予想しました。

一方で、村上順氏と村上斉氏により、色付きジョーンズ多項式の1の冪根における特殊値が、カシャエフ不変量と一致することが証明され、ジョーンズ多項式を研究する数学者達の注目が、この予想に集まりました。

本研究の代表者は、早い段階からこの予想の証明に取り組み、一定の成果を挙げて

きました。まず、カシャエフ氏との共同研究により、

- ・ 量子ダイログ関数を用いたカシャエフ不変量の積分表示

を与え、うへの図式におけるポテンシャル関数が被積分関数の中に現れることを確認しました。また、カシャエフ氏、京都大学の大槻氏との共同研究により、

- ・ 5・6交点結び目のカシャエフ不変量の積分表示に対する漸近展開

を行い、体積予想が成立することを確かめました。さらに、本研究の代表者独自の研究として、結び目補空間の4面体分割を解析し、ポテンシャル関数の幾何的性質を明らかにしてきました。具体的には、

- ・ 臨界方程式が、幾何構造を与える方程式と一致する
- ・ 臨界値の虚部と実部が、体積とチャー・サイモンズ不変量を与える

などの事実です。カシャエフ不変量の積分表示の漸近展開に関する技術的問題が解決できれば、ただちに、チャー・サイモンズ不変量を含む形に一般化された体積予想が解決できます。

2. 研究の目的

本研究の目標は、ポテンシャル関数とその1パラメータ変形の幾何的性質の解明にあります。これは、カリフォルニア工科大学のグコフ氏によって提唱された、体積予想の一般化に対応し、その幾何的側面をサポートするものです。また、本研究の代表者による、

- ・ カスプ・シェイプと呼ばれる幾何的不変量とその一般化に対する行列式公式

や、大槻氏と九州大学の高田氏による、

- ・ 2橋結び目のライデマイスター・トーシヨンの新しい公式

においても、ポテンシャル関数とその1パラメータ変形のヘッセ行列が登場します。これらは、カシャエフ不変量の高次漸近展開に対応すると目され、やはり体積予想の延長線上にあります。

具体的には、ポテンシャル関数及びその1パラメータ変形を用いて、

課題1：双曲結び目のライデマイスター・トーシヨンの新しい公式

- 課題2：双曲結び目の極大カスプ・トーラスに関する幾何的不変量
課題3：双曲結び目のカスプ・シェイプとその一般化の最小多項式

などを記述することが目標ですが、課題1に関しては、大槻氏と高田氏の結果の一般化、課題2に関しては、極大カスプ・トーラスの面積などの評価による3次元トポロジーへの応用、課題3に関しては、A多項式の効率的な計算方法の開発という側面があります。

3. 研究の方法

まず、課題1について説明します。ライデマイスター・トーションは、CW複体が与えられたとき、その基本群の表現に対して定義される不変量です。体積予想では、双曲結び目の補空間に対し、完備双曲構造から定まるホロノミー表現に対して定義されるライデマイスター・トーションが、カシャエフ不変量の漸近展開における第2次の項に現れる、と考えられています。本研究では、

- (1) 結び目補空間の四面体分割を退化させ、2次元複体を構成する
- (2) 2次元複体のホモロジー群の基底として、ポテンシャル関数の変数に対応するものをうまく選ぶ

という方針で、ライデマイスター・トーションを計算し、

- (3) ポテンシャル関数のヘッセ行列式との比較

を行う予定でした。

次に、課題2について説明します。双曲結び目の極大カスプは、サーストン・グロモフによる、

2 定理：極大カスプの境界のトーラス上にある閉曲線の長さが、2 より大きければ、この曲線に沿ったデーモン手術で得られる閉3次元多様体は、負曲率幾何構造を許容する。

に登場し、結び目の例外的手術、すなわち双曲構造を許容しない多様体を生ずるデーモン手術、の研究で、中心的な役割を果たしてきました。最近では、オックスフォード大学のラッケンビー等により、結び目図式の情報から、例外的手術に関する情報を導く手法が注目されています。

本研究では、結び目図式から定義されるポテンシャル関数を用いて、

- (ア) 極大ではないカスプから同カスプへの最短測地線の長さを求める
- (イ) 最短測地線の長さから、極大ではないカスプと極大カスプの相似比を求める

という作業を行う予定でした。

最後に、課題3を説明します。カスプ・シェイプとその一般化とは、結び目の緯線に対して、そのホロノミー表現の1パラメータ族が定める固有値関数の、テイラー級数のことを指します。コロンビア大学のノイマン氏とマックスプランク研究所のザギエ氏が提唱した幾何的不変量で、これまでの研究により、ポテンシャル関数の1パラメータ変形の微係数により記述できることがわかっていました。本研究では、

- (A) ポテンシャル関数の1パラメータ変形の偏微分の効率的な計算方法
- (B) ホロノミー表現以外の表現に対応するカスプ・シェイプとその一般化

に取り組み、ポテンシャル関数の各臨界点に対応するパラボリック表現から定まるカスプ・シェイプとその一般化を用いて、

- (C) 結び目のA多項式を、効率的に計算する方法

という作業を行う予定でした。

4. 研究成果

課題1に関しては、(1)及び(2)までは順調に進みましたが、期待していた大槻・高田の手法が2橋結び目以外には通用しないことが判明し、未だ(3)に関する一般的な手法を確立できていない状況です。現在、交点数の少ない結び目に対する(3)のデータを整理し、再検討しているところです。

課題2に関しては、交代結び目の補空間のキューブ分解が誘導する非正曲率構造における測地線の研究を、広島大学の作間氏と共同で行いました。この研究により、交代結び目の補空間の四面体分割の非退化性が理論的に証明され、交代結び目に関しては、体積予想の解決の可能性が出てきました。また、交代結び目に対する(ア)及び(イ)の有効性も確認しましたが、デーモン手術に関する定性的な成果には至っておらず、今後の課題とします。

課題3に関しては、先行研究において、カスプ・シェイプとその一般化が、ポテンシャル関数の高次偏導関数を用いた行列式によ

って与えられることを示しましたが、本研究では(B)及び(C)に取り組み、結び目のA多項式の係数多項式を、結び目の各パラボリック表現に対応するカスプ・シェイプとその一般化を用いて記述する方法を発見し、計算が困難とされるA多項式の、数値計算的な計算手法を開発しました。(A)に関してはあまり進展がなく、今後の課題とします。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Makoto Sakuma and Yoshiyuki Yokota, An application of non-positively curved cubings of alternating links, Proceedings of American Mathematical Society 146(2018), 3167-3178 (査読有)

Tomotada Ohtsuki and Yoshiyuki Yokota, On the asymptotic expansions of the Kashaev invariant of the knots with 6 crossings, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society(2017), 1-53 (査読有)

Yoshiyuki Yokota, On the cusp shape of hyperbolic knots, Journal of Knot Theory and its Ramifications 25(2016), 1650025 (査読有)

[学会発表](計3件)

Yoshiyuki Yokota, On a non-positively curved cubing of the exterior of an alternating knot, Workshop on Volume Conjecture and Quantum Topology, Waseda University, Tokyo, September 7, 2016

Yoshiyuki Yokota, On the cusp shape of hyperbolic knots and its generalizations, Growth3, Waseda University, Tokyo, March 3, 2016

横田佳之, カシャエフ不変量に潜む幾何構造, ENCOUNTER with MATHEMATICS, 中央大学, 東京, 2016年3月2日

横田佳之, カシャエフ不変量と量子双対数関数, ENCOUNTER with MATHEMATICS, 中央大学, 東京, 2016年3月2日

[図書](計 件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

横田 佳之(YOKOTA YOSHIYUKI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 40240197

(2)研究分担者

()

研究者番号:

(3)連携研究者

()

研究者番号:

(4)研究協力者

()