

令和 2 年 7 月 7 日現在

機関番号：32629

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04880

研究課題名(和文) 微分可能写像の特異点理論と結び目理論のインタフェース

研究課題名(英文) Interface between singularity theory of mappings and knot theory

研究代表者

高瀬 将道 (Takase, Masamichi)

成蹊大学・理工学部・教授

研究者番号：30447718

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：微分可能写像の特異点理論を用いて、高次元トポロジーと低次元トポロジー、微分トポロジーと代数的トポロジーの狭間に何かを発見すべく研究を行った。

曲面結び目のローズマン変形の独立性に関する研究を行い、東京学芸大学の田中心氏との共著論文を完成させた。有向3次元多様体から3次元複素空間への滑らかな埋め込みの複素接触点集合に関して粕谷直彦氏(京都産業大学)との共著論文を完成させた。有向n次元多様体から複素空間へのCR正則埋め込みの存在性に関して粕谷直彦氏との共著論文を完成させた(誤った命題に繋がる不注意なタイプを見つけ後日修正を行った)。島根大学の渡邊忠之との議論を含むいくつかの研究の端緒を掴んだ。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでも「高次元トポロジー vs 低次元トポロジー」、「代数的トポロジー vs 微分トポロジー」、「PL トポロジー vs 微分トポロジー」という具合に分野横断的な研究を行ってきたが、本研究課題における成果はトポロジーをはみ出して複素微分幾何的な領域にまで広がってきた。このことは多様体のトポロジー、幾何学、ひいては数学の他分野への応用の幅を広げることに資する。

研究成果の概要(英文)：I have been pursuing a new field of study lying between high dimensional topology and low dimensional topology and between differential topology and algebraic topology. First, I studied the independence among the seven types of roseman moves in surface knot theory and published a joint paper with Dr. Kokoro Tanaka (Tokyo Gakugei University). Second, I studied the behaviour of complex tangents of smooth manifolds embedded in complex space and published two joint papers with Dr. Naohiko Kasuya (Kyoto Sangyo University). In addition, several projects, including a joint project with Dr. Tadayuki Watanabe (Shimane University), are underway.

研究分野：位相幾何学

キーワード：中次元トポロジー

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

コボルディズム理論と写像の特異点理論は、トポロジーの礎を築いた R. Thom の二大遺産である。前者は大発展し様々な分野で指導原理となった。後者はモース理論やはめ込み理論をルーツとし、カタストロフ理論として興隆した歴史を持つが、写像の特異点理論を用いて多様体のトポロジーを調べる研究は、モース理論以外には、充分になされているとは言えない状況だった。これは、例えば特異点の分類といった局所的な問題の解決が難しく、特異点を体系的に理解するために必要な数学的道具に欠いていたためだった。しかしながら、研究開始当初は Kazarian、Szucs、Rymani、Feher らによってこの困難が解決されつつあり、まさに「写像の特異点理論を用いて多様体の大域的性質を捉える」研究が俟たれていた。

2. 研究の目的

微分可能写像の特異点理論の大域的側面を結び目の研究に応用することを目的とした。低次元トポロジー vs 高次元トポロジー、微分トポロジー vs 代数的トポロジーといった異なる領域の境界にある様々なトピックに注目することで、複数の分野を結び付け新しい分野を生み出すことも狙った。

より具体的には、微分可能写像の特異点理論を用いて滑らかな多様体の埋め込み・はめ込みの幾何的様相を調べることに、古典的結び目理論において成功した A' Campo による「divide」の高次元化を試みることに、滑らかな多様体の総実埋め込みの研究に微分可能写像の特異点理論を応用することなどを掲げた。

3. 研究の方法

数学の通常の研究方法を踏襲した。すなわち、必要に応じて多くの数学者と交流し、議論の中で着想を得る；得られた成果は英文の論文にまとめ、多くの数学者が読むことのできるジャーナルに公表し、研究会等での講演によっても公表する；といった手法である。

研究者との交流として具体的には、東京学芸大学の田中心氏、京都産業大学の粕谷直彦氏、京都大学の清水達郎氏、島根大学の渡邊忠之氏、慶應大学の石川昌治氏を含む多くの研究者と議論を持った。

本研究は少し変わった独自性を持ち、進展の方向が予測しにくい（あまり予測しない方がよいと思われる）ものだったので、独自性が蛸壺的な方向に向かぬよう、各局面で niche but nice であることを目指した。

4. 研究成果

(i)

曲面結び目のローズマン変形の独立性に関して東京学芸大学の田中心氏との共著論文を完成させ、Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society に公表した。この論文では、2次元球面の結び目に対して、ブランチ点に関わるローズマン変形なしには移り合えないブランチ点のない図式の組を構成した。正の種数の曲面に対しての類例はあったが、2次元球面の場合には初めての例である。証明には、はめ込み理論、特に球面の裏返しに現れる4重点の評価が用いられており、意外な方法での解決だった。

(ii)

有向3次元多様体から3次元複素空間への滑らかな埋め込みの複素接触点集合に関して粕谷直彦氏（京都産業大学）との共著論文を完成させ、Transactions of the American Mathematical Society に公表した。この論文では有向3次元多様体 M から3次元複素空間への滑らかな埋め込みの複素接触点の集合が表す M の整数係数ホモロジー類は常に消えること、逆に M の自明な整数係数ホモロジー類を表す1次元部分多様体は M から3次元複素空間へのある埋め込みの複素接触点の集合として実現できることを示した。すなわち、3次元球面内のすべての結び目・絡み目は3次元球面から3次元複素空間への滑らかな埋め込みの複素接触点の集合として実現できるのである。結び目理論と複素幾何を結びつけるこの斬新な結果の証明が、佐伯修氏（九州大学 IMI）および山本稔氏（弘前大学）による安定写像とその変形の理論を巧妙に用いることによりなされたことは特筆に値するであろう。証明の中で、ある種の安定写像に対する Thom 多項式の精密化と呼べるものを与えていること（特異点理論への恩返し）も興味深いと思う。結果も方法も予期しなかったものであった。

(iii)

有向 n 次元多様体から複素空間への CR 正則埋め込みの存在性に関する粕谷直彦氏との共著論文を完成させ、International Journal of Mathematics に公表した (誤った命題に繋がる不注意なタイプを見つけ後日修正を行った)。この論文では滑らかな n 次元多様体から $(n-1)$ 次元複素空間への CR 正則埋め込みの存在に関していくつかの必要条件を与えた。結果の一部を以下に記す。

まず有向 n 次元多様体 M から q 次元複素空間への滑らかな埋め込みが CR 正則とは、各点 x において

$$\dim_{\mathbb{C}}(df_x(T_x M) \cap Jdf_x(T_x M)) \geq n - q$$

が成り立つことをいう。 $n=q$ のとき、これは総実の条件と一致することに注意する。さて、この論文の主定理の一つの系は、次である。

【定理】

n が 4 を法として 3 に等しくないとき、 M が $(n-1)$ 次元複素空間へ CR 正則埋め込みを許容すれば M は n 次元複素空間へ総実埋め込み可能である。

このことに簡単な考察を加えると、次が得られる：

【系】

Kervaire semi-characteristic が消えていない有向閉 $(4k+1)$ 次元多様体から $4k$ 次元複素空間への CR 正則埋め込みは存在しない。

また、 M が単連結な閉 5 次元多様体であるときには次の定理を得た：

【定理】

単連結な閉 5 次元多様体 M が 4 次元複素空間への CR 正則埋め込みを許容するための必要充分条件は、 M の 2 次元ホモロジー群の階数が奇数であることである。

さらに、 M が球面の場合は、球面上に存在する 1 次独立なベクトル場の個数を Radon-Hurwitz 数を用いて評価した Adams の定理を用いることにより、次を得た：

【定理】

次の各場合に n 次元球面から q 次元複素空間への CR 正則埋め込みは存在しない：

- (a) n が偶数である場合；
- (b) $4q = 3n+2$ かつ $n = 1, 3, 7$ である場合；
- (c) $2q = n+3$ かつ n は 4 を法として 3 に等しくない場合。

(iv)

そのほか、島根大学の渡邊忠之との議論を含むいくつかの研究の端緒を掴んだ。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kasuya Naohiko, Takase Masamichi	4. 巻 30
2. 論文標題 Erratum: Generic immersions and totally real embeddings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1992003 ~ 1992003
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1142/S0129167X19920034	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 高瀬将道	4. 巻 4月号
2. 論文標題 特異点と結び目	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理科学, サイエンス社	6. 最初と最後の頁 14, 20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kasuya Naohiko, Takase Masamichi	4. 巻 29
2. 論文標題 Generic immersions and totally real embeddings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1850073 ~ 1850073
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1142/S0129167X18500738	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kasuya Naohiko, Takase Masamichi	4. 巻 370
2. 論文標題 Knots and links of complex tangents	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2023 ~ 2038
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7164	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masamichi Takase and Kokoro Tanaka	4. 巻 161
2. 論文標題 Regular-equivalence of 2-knot diagrams and sphere eversions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 237,246
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004116000244	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 粕谷直彦
2. 発表標題 Knots and links of complex tangents
3. 学会等名 可微分写像の特異点論とその応用
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高瀬将道
2. 発表標題 Complex tangents and knots
3. 学会等名 トポロジー-金曜セミナー、九州大学
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	渡邊 忠之 (Watanabe Tadayuki) (70467447)	島根大学・学術研究院理工学系・講師 (15201)	