

令和元年6月10日現在

機関番号：32652

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04881

研究課題名(和文)空間グラフの代数的不変量とその応用

研究課題名(英文)Algebraic invariants of spatial graphs and its applications

研究代表者

新國 亮(Nikkuni, Ryo)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：00401878

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1) C_n 変形と呼ばれる局所変形で移りあう2つの有向絡み目の、Jones多項式の差の共通因子の研究、(2) ある種の3価空間グラフの正則イソトピー不変量の、調整関式による正規化の研究、(3) ランダム線形空間グラフの研究、(4) 種数2の6交点以下の既約なハンドル体結び目の同型類全体の集合の前順序構造の研究、(5) 6, 7頂点完全グラフにおけるConway-Gordonの定理の、8頂点以上の完全グラフへの一般化の研究、を行ない、それぞれの研究について多くの応用を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1) 結び目のJones多項式の C_n 変形による最小差が特徴付けられた。(2) 結び目の同型分類が正則イソトピー分類に帰着される「基本原理」が、ある種の3価空間グラフにおいても成り立つことが明らかにされた。(3) 非自明結び目を含まない線形空間 $3+3$ 頂点完全2部グラフは「標準的」であることが明らかとなり、ランダム線形空間グラフへの応用が見出された。(4) 種数2の既約なハンドル体結び目の階層構造の理解が進んだ。(5) 2を法とした合同式であるConway-Gordonの定理が、整数上の等式として任意の頂点数の完全グラフに一般化され、線形空間グラフの理論に多くの応用が見出された。

研究成果の概要(英文)：(1) We gave the common factor of the difference of Jones polynomials for two oriented links which are C_n -equivalent, (2) For a trivalent graph with certain conditions, we showed that any regular isotopy invariant of its adjusted spatial graph diagram is an ambient isotopy invariant of the spatial graph, (3) We showed that a rectilinear spatial complete bipartite graph on $3+3$ vertices is totally free if each of the constituent knots is trivial, (4) We defined a preorder in the set of genus 2 handlebody-knots and exhibited a lot of ordered pairs of irreducible genus 2 handlebody-knots in the table up to 6 crossings, each of which does not admit this order, (5) We generalized the Conway-Gordon theorems for the complete graph on 6 and 7 vertices to complete graphs with arbitrary number of vertices greater than or equal to eight. For each of the above, many applications were given.

研究分野：低次元トポロジー，空間グラフ理論，結び目理論

キーワード：空間グラフ 結び目 絡み目 Jones多項式 正則イソトピー 結び目内在性 絡み目内在性 Conway-Gordonの定理

1. 研究開始当初の背景

空間グラフ理論の研究は、結び目理論の一般化に留まらない内在的な基礎研究課題を持つばかりでなく、分子生物学や高分子化学への応用分野の理論的支柱の役割も担い、その重要性が高まっている状況にあった。海外の空間グラフ研究の主流は、長らく、含まれる結び目や絡み目を調べて空間グラフの複雑度を測る研究で、結び目理論の既知の事実とグラフ理論の数え上げ的手法に依存していたが、研究代表者は、特に代数的トポロジーに根差した空間グラフの代数的不変量の研究の応用により、大域的分類問題において成果をあげていたほか、含みうる結び目や絡み目の観察だけでは抽出できない空間グラフの複雑度の存在を明らかにし、また、従来、有限幾何の手法と計算機の援用により得られていた結果に代数的不変量の応用による簡明な別証明を与えるなど、空間グラフ理論全域に渡り成果を積み重ねて来ていた。更に、代数的不変量の応用による、空間グラフの対称性の研究や、線形空間グラフの結び目内在性の研究は化学の分野からも反響を呼び、分子トポロジーへの本格的な応用研究の気運が高まりつつあった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、空間グラフ特有のトポロジー的性質を、具体的に計算可能な代数的不変量を用いて解明し、その応用を見出すことであった。特に代数的トポロジーに根ざした不変量に着目し、(1) 空間グラフの補空間の基本群(及びその線型表現)から導かれる(ねじれ)Alexander 不変量の研究、(2) グラフの配置空間のコホモロジーなどを用いて定義される特性類的不変量の研究、を柱とした研究を行なった。空間グラフの大域的分類問題の研究、空間グラフの幾何学的対称性の研究、高分子化学のトポロジー的研究(分子トポロジー)のそれぞれについての応用研究も試み、空間グラフ理論の本質的な理解と進展を目指した。

3. 研究の方法

空間グラフの(ねじれ)Alexander 不変量については、空間グラフの補空間の基本群の有限表示を求め、そこに有限表示群の(ねじれ)Alexander 不変量の理論を適用するという手法を用いた。また、空間グラフの特性類的不変量の研究については、最も基本的な特性類的不変量である Wu 不変量による空間グラフのホモロジー分類を基に、空間グラフ内の結び目の代数的不変量の線型和で空間グラフのホモロジー不変量を構成し、そこにホモロジー分類を適用してそれら結び目たちの束縛条件を捉え、空間グラフの内在的性質を取り出すという手法を用いた。また、空間グラフの図式上の局所的な変形による各種代数的不変量の変化を調べ、大域的分類問題への応用を見出すという、研究代表者が慣れ親しんでいる手法も随所で用いた。

4. 研究成果

- (1) 空間 6 頂点完全グラフが含む 2 成分絡み目の絡み数の和は常に奇数であり、また空間 7 頂点完全グラフが含む Hamilton 結び目の Conway 多項式の 2 次の係数の和は常に奇数であることは、Conway-Gordon の定理としてよく知られている。また、その整数持ち上げとしての「精密化 Conway-Gordon の定理」が研究代表者によって得られている。森下央子氏(東京女子大学)との共同研究により、一般頂点数 n の完全グラフについて精密化定理を与え、空間完全グラフに関して散発的に得られていた既知の Conway-Gordon 型公式を全て統一するとともに、線形空間グラフに関する多くの応用を見出した。
- (2) 結び目 J, K に対し J の結び目群から K の結び目群への全射準同型が存在するとき J K と定義すると、この関係は結び目型の前順序を定める。特に素な結び目については半順序となり、11 交点以下の素な結び目についてその構造が決定されている。小澤 裕子氏(東京女子大学)、鈴木正明氏(明治大学)との共同研究により、種数 2 のハンドル体結び目について同様の研究を開始し、6 交点以下の既約なハンドル体結び目について、Alexander 不変量を用いて、この前順序を許容しない既約な種数 2 のハンドル体結び目の多くの組を得た。
- (3) ある型の 3 価グラフについて、その同じ空間埋め込みを表す平面上の 2 つの空間グラフ図式が正則イソトピックであるための必要十分条件を、各結び目成分の回転数、交差符号和、及び各頂点の像から決まる不変量によって与えた。応用として、この型のグラフについて空間グラフの調整図式概念を導入し、調整図式の正則イソトピー不変量は、もとの空間グラフのアンピエント・イソトピー不変量となることを示した。これは Kauffman による結び目・絡み目に対する同様の基本原理の空間グラフへの拡張である。
- (4) Erica Flapan 氏(Pomona College)、Kenji Kozai 氏(Harvey Mudd College)との共同研究により、線形空間 $3+3$ 頂点完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ は、結び目成分が全て自明ならば全自由 (= 任意の空間部分グラフの補空間の基本群は自由群)であることを示した。このことから結び目成分が全て自明な線形空間 $K_{3,3}$ は「標準的な」空間 $K_{3,3}$ であることがわかり、ランダム線形

空間グラフへの応用が見出される。

- (5) 任意の2つの有向結び目の Jones 多項式の差は、必ず $(t-1)^2(t^2+t+1)$ で割り切れることが Jones 本人によって示されていたが、この事実を、結び目の Vassiliev 不変量と深く関係する C_n 同値の立場から、次のように一般化した：(i) 2つの有向絡み目が C_2 同値ならば、その Jones 多項式の差は $(t-1)^2(t^2+t+1)$ で割り切れる。(ii) 3以上の n に対し、2つの有向絡み目が C_n 同値ならば、その Jones 多項式の差は $(t-1)^n(t^2+t+1)(t^2+1)$ で割り切れる。(iii) 3以上の n に対し、ある2つの互いに C_n 同値な有向結び目の組で、その Jones 多項式の差がちょうど $(t-1)^n(t^2+t+1)(t^2+1)$ であるものが存在する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計5件)

- (1) H. Morishita and R. Nikkuni, Generalizations of the Conway-Gordon theorems and intrinsic knotting on complete graphs, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, in press. 査読有
- (2) A. Ishii, R. Nikkuni and K. Oshiro, On calculations of the twisted Alexander ideals for spatial graphs, handlebody-knots and surface-links, *Osaka Journal of Mathematics* **55** (2018), no. 2, 297--313. 査読有
- (3) E. Flapan, T. Mattman, B. Mellor, R. Naimi and R. Nikkuni, Recent developments in spatial graph theory, *Knots, Links, Spatial Graphs, and Algebraic Invariants*, 81--102, *Contemp. Math.*, **689**, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2017. 査読有
- (4) R. Nikkuni, C_n -moves and the difference of Jones polynomials for links, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **26** (2017), no. 5, 1750029. 査読有
- (5) A. Mizusawa and R. Nikkuni, A homotopy classification of two-component spatial graphs up to neighborhood equivalence, *Topology and its Applications* **196** (2015), Part B, 710--718. 査読有

〔学会発表〕(計19件)

- (1) 新國 亮, Non-existence of epimorphisms between certain genus two handlebody-knot groups, *Claremont Topology Seminar*, Claremont McKenna College, 2019年3月7日
- (2) 森下 央子, 8頂点完全グラフの Conway-Gordon 型定理について(新國 亮氏(東京女子大学)との共同研究), 研究集会「東北結び目セミナー2018」, カレッジプラザ(秋田市), 2018年10月5日
- (3) 小澤 裕子, あるハンドル体結び目群の間の全射準同型の非存在性について(新國 亮氏(東京女子大学)との共同研究), 研究集会「東北結び目セミナー2018」, カレッジプラザ(秋田市), 2018年10月5日
- (4) 新國 亮, Generalization of the Conway-Gordon theorems and intrinsic knotting on complete graphs, *日本大学文理学部トポロジーセミナー*, 2018年6月26日
- (5) 新國 亮, 8頂点完全グラフの結び目内在性について, N-KOOK セミナー, 大阪市立大学文化交流センター, 2018年5月19日
- (6) Kenji Kozai, Random linear embeddings of spatial graphs and configurations of Mobius ladders (Erica Flapan 氏(Pomona College), 新國 亮氏(東京女子大学)との共同研究), *AMS Sectional Meetings (2018 Spring Eastern Sectional Meeting)*, Northeastern University, Boston, 2018年4月21日
- (7) 新國 亮, Conway-Gordon type theorems for Hamiltonian knots in spatial complete graphs, An invited talk at Hanyang University, 2018年2月26日
- (8) 新國 亮, Regular isotopy on spatial graphs and adjusted diagrams, *School of Spatial Graph Theory*, 日本大学, 2018年1月23日
- (9) 新國 亮, 空間グラフの調整図式について, 研究集会「2017年度琉球結び目セミナー」, 那

那覇市ぶんかテンプス館, 2018 年 1 月 21 日

- (10) 新國 亮, Conway-Gordon Type Theorems, Session on Spatial Graph Theory, MAA MathFest 2017, Hilton Chicago, 2017 年 7 月 27 日
- (11) 新國 亮, A regular isotopy between two spatial graphs which are ambient isotopic, Friday Seminar on Knot Theory, 大阪市立大学数学研究所, 2017 年 5 月 12 日
- (12) Erica Flapan, Generalized Simon invariants of spatial graphs (Will Fletcher 氏 (Stanford University), 新國 亮氏(東京女子大学)との共同研究), AMS Sectional Meetings (2017 Spring Southeastern Sectional Meeting), College of Charleston, Charleston, 2017 年 3 月 10 日
- (13) 新國 亮, Linear embeddings of a graph into the 3-space and Conway-Gordon type theorems, International workshop on Topology and graphs in polymer chemistry, 東京工業大学, 2016 年 8 月 6 日
- (14) 新國 亮, Free differential calculus and classical and twisted Alexander invariants of spatial graphs, International Workshop on Spatial Graphs 2016, 早稲田大学, 2016 年 8 月 5 日
- (15) 新國 亮, ある結び目の組の Jones 多項式の差の計算, 研究集会「2016 琉球結び目セミナー」, 那覇市ぶんかテンプス館, 2016 年 2 月 20 日
- (16) 新國 亮, On calculations of the twisted Alexander ideals for spatial graphs, handlebody-knots and surface-links (石井 敦氏(筑波大学), 大城 佳奈子氏(上智大学)との共同研究), AMS Sectional Meetings (2015 Fall Western Sectional Meeting), California State University, Fullerton, 2015 年 10 月 24 日
- (17) 新國 亮, 空間グラフの Alexander 不変量の計算(演習の時間を兼ねて), 研究会「ハンドル体結び目とその周辺 VIII」, 早稲田大学, 2015 年 9 月 27 日
- (18) 新國 亮, 絡み目の Jones 多項式の共通因子と Vassiliev 不変量について, 研究集会「拡大 KOOK セミナー2015」, 神戸大学百年記念館, 2015 年 8 月 20 日
- (19) 新國 亮, On calculations of the twisted Alexander ideals for spatial graphs, handlebody-knots and surface-links (石井 敦氏(筑波大学), 大城 佳奈子氏(上智大学)との共同研究), Friday Seminar on Knot Theory, 大阪市立大学数学研究所, 2015 年 5 月 1 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.lab.twcu.ac.jp/nick/index-e.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。