

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 22 日現在

機関番号：11101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04890

研究課題名(和文) 行列及び線形作用素の数域についての曲線論的研究とその応用

研究課題名(英文) Algebraic curve theoretic study of numerical ranges of matrices and operators and its applications

研究代表者

中里 博(Nakazato, Hiroshi)

弘前大学・理工学研究科・教授

研究者番号：10188922

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：行列ないし線形作用素の数域は複素数平面の部分集合で、行列等のユニタリ変換で不変である。数域は行列のエルミット部分と歪エルミット部分の同時特性方程式で決定されることが知られている。この逆問題が50年程前に提起され、約10年前にチェコと米国の数学者によって解決された。しかし関連するいくつかの問題が依然として未解決であった。この研究課題遂行で、私はそのいくつかの問題を解決した。この問題は量子力学的なもつれの問題とも関係している。発見された方法は作用素を数域を通じて扱う上での線形解析的なモデルを提示する。有理曲線の場合についてチェコの数学者によって提示されていた方法を楕円曲線に適用する手がかりを得た。

研究成果の概要(英文)：The numerical range of a matrix or a linear operator is a subset of the Gaussian plane which is invariant under unitary transformations. It is known that the numerical range is determined by the simultaneous characteristic polynomial of the Hermitian part and the skew Hermitian part of the matrix (or the operator). The inverse problem was posed about 50 years ago. The problem was affirmatively solved about 10 years ago by Czech and American mathematicians. But some related interesting problems were still open. In this subject, I solved some related problems. The problem is also related to the entanglement of the quantum physics. The discovered method provides a linear theoretic model to treat operators via numerical ranges. Especially some new properties of Toeplitz matrices and weighted cyclic shift matrices are found by this research. These results provide new aspects to study these special matrices,

研究分野：数物系科学

キーワード：正方向列 線形作用素 数域 代数曲線 特異点 重みつきシフト行列 縮小作用素 テープリッツ行列

1. 研究開始当初の背景

複素正方行列 A は、2 個のエルミット行列 H と K を用いて $A=H+iK$ と表すことができ、この 2 つのエルミット行列が交換可能でないときの A の持つ性質を解析する種々の方法が開発されてきた。 A の数域を用いる方法は実数 a と b に対するエルミット行列 $aH + bK$ の固有値系を使って A の性質を調べることに基づく。約 50 年前に米国の数学者が、2 変数の固有多項式から出発して逆に A を構成することができるかを問い、約 10 年前にチェコの数学者フィードラーや米国の数学者ヘルトンらにより、逆構成が可能であることがわかった。多項式に種々の性質を課すとき、その性質を反映する形で A を構成できるかといった関連する問題が未解決であり解決が期待されていた。

2. 研究の目的

線形作用素としての行列 A の解析の中心課題は、そのデカルト分解 (H, K) の持つ非可換性から生じる不可思議な A の性質をいかに合理的に解明するかであり、量子力学における「もつれ」(エンタングルメント)に関する問題もこれと深い関係にある。多項式から行列 A を構成するという逆問題のより一層の解決により、線形作用素の基本的な問題に取り組むことに加え、量子計算における誤り訂正や核磁気共鳴装置の制御の精度向上などこれまで数域の研究の応用として注目されてきた事柄にも具体的なアルゴリズムを提供することで寄与することを研究の目的とする。

3. 研究の方法

代数曲線論等の代数幾何学的な理論や数式処理におけるグレイブナー基底を用いての計算などの代数的理論や方法ならびにスペクトル解析をはじめとする関数解析的な手法を用いて理論的に線形作用素や行列の数域やこれに関係する特性量について研究を行った。特に行列の解析に当たっては特に具体的な例を通じての対象の考察においてはコンピューターによる数式処理的方法による計算が有効でありコンピューターの計算に基づき新しい結果が示唆されそれを理論的に裏付けるといった形態を多数経験した。研究を広げ新しいアイデアをつかむため約十数年に渡って共同研究している台湾の東呉大学の Mao-Ting Chien (簡 茂丁) 教授のほか、米国アラバマ州のオーバン大学の Tin-Yau Tam 教授とその指導学生、さらにモンゴルの国立モンゴル大学の Vandanjav 教授や若手研究者の Undrakh 氏などとも共同研究を行い新しい視点や方法の導入に努めた。米国のグループとは論文 1 編、モンゴルのグループとは論文 2 編の出版などの成果

があった。ほかにも米国における研究発表の際、情報交換でこの研究課題に関係する米国の若手研究者の成果も知ることができた。国際的な交流を通じての成果の発展を今後も追及したい。

4. 研究成果

研究課題についての理論的な面では、行列の数域の研究をエルミット行列 $aH + bK$ の固有値を調べるという観点から研究を進めてきた。同時特性多項式

$$f(x, y, z) = \det(xH + yK + zI)$$

が定める複素射影曲線 $f(x, y, z)=0$ をその種数や特異点を使って調べるという方法論を使って特にこれが有理曲線や楕円曲線になる場合などの解析を進めてきた。このような方法を逆に辿って行列の構造解析を進めるという方法論が、米国のヘルトンらによって提起された。論文(9)として主な発表論文のなかで記したチェコの数学雑誌に掲載された論文で、 $f(x, y, z)=0$ からヘルトンらの公式で導かれる複素対称行列 (c_{ij}) の非対角成分を $f(x, y, z)=0$ が有理曲線や楕円曲線の場合につきヤコビのシータ関数を用いてより平易な形で表現することができた。さらにこれを発展させ、論文(2)ではさらに良く知られたワイエルシュトラスの P -関数で対称行列の成分を表すことに成功した。曲線 $f(x, y, z)=0$ から導かれる対称行列が、ユニタリ同値なものを同一視すれば一意となるとの期待も考えられていたが、このような逆構成が一意でないことを論文(3)で示した。

19世紀の初頭ナポレオンのロシア遠征に加わり捉えられたことで有名なフランスの幾何学分野の数学者ボンズレは次のような定理を発見した。1つの楕円板の内部に別の楕円があるとき、外の楕円に内接し、内側の外側に外接する n 角形がひとつ存在すれば、同じような性質を持つ n 角形を外側の楕円のどの点を出発点にしても描ける。この定理の外側を単位円周に置き換え、内側の楕円のある $n-1$ 次の行列の数域の境界に置き換えた定理が 1990 年代に台湾や米国の数学者らによりほぼ同時に発見された。この性質に関する問題を論文(3)および論文(13)で扱い、五角形の辺を延長して星型図形を作りその頂点を助変数につき動かすことで新たなボンズレ型の図形を構成した。

この研究課題の応用可能性を示すものとして、量子計算の誤り訂正に q -数域が有用であるとオーストラリアの研究者 Duan らが指摘していることをあげたい。この一般化された数域は凸であり、その境界が代数曲線上にあることは知られていたが、その次数が高く具体的に曲線の方程式を求めることは困難であろうと考えられてきた。この方程式を求

める基本的なアルゴリズムを精密化することができた。論文(7)では、具体的な4次のテプリッツ型の冪零行列として上三角行列で第一行が(0,1,0,1)である行列のq-数域の境界方程式を $q=1599/1601$ の場合に求め、その次数が40で項数は253に達することを示した。計算機使用でこのようなサイズの2変数多項式は平凡なものであるがそれが巨大なサイズの多項式の因子として現れ、より直接的な計算方法で目的の境界方程式を求めることは難しい。補間法の適用により計算機の容量限界に近い巨大なサイズの多項式の関与を切り抜けることができたことに特色がある。

成果に関連した事項につき付記する。本研究課題の成果およびそれに先立つ研究代表者(中里博)とこれまで二十年以上にわたり共同研究を行ってきた簡茂丁(Mao-Ting Chien)東呉大学教授の研究成果をまとめ、大学院博士前期課程の学生や行列解析分野の研究者を读者として想定するレクチャー・ノート(105頁)を出版し成果を広めることを図っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

(1)Peng-Ruei Huang, Hiroshi Nakazato,
“Product of two diagonal entries of a 3-by-3 normal matrix”,
査読あり,
Linear Algebra and Its Applications, vol. 544(2018), pp.115-140.

(2)Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Determinantal representations of elliptic curves via Weierstrass elliptic functions”,
査読あり,
Electronic Journal of Linear Algebra, vol.34(2018), 125-136.

(3) Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Unitary similarity of the determinantal representations of unitary bordering matrices”,
査読あり,
Linear Algebra and Its Applications, vol.541(2018), pp.13-35.

(4)Mao-Ting Chien, J.Z. Liu, Hiroshi Nakazato, Tin-Yau Tam
“Toeplitz matrices are unitarily similar to symmetric matrices”,
査読あり,
Linear and Multilinear Algebra, vol.65(2017), pp.2131-2144.

(5)Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Computation of Riemann matrices for the Hyperbolic curves of determinantal polynomials”,
査読あり,
Annals of Functional Analysis, vol.8(2017), pp.152-167.

(6) Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Singular points of the algebraic curves associated to unitary bordering matrices”,
査読あり,
Linear Algebra and Its Applications, vol.513(2017), pp.224-239.

(7) Peng-Ruei Huang, Hiroshi Nakazato,
“The boundary of the q-numerical range of some Toeplitz nilpotent matrix”,
査読あり,
Nihonkai Mathematical Journal, vol.27(2016), pp.155-165.

(8) Peng-Ruei Huang, Hiroshi Nakazato,
“A note on product range of 3-by-3 normal matrices”,
査読あり,
International Mathematical Forum, vol. 11(2016), pp.885-891.

(9)Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Computing the determinantal representations of hyperbolic forms”,
査読あり,
Czechoslovak Mathematical Journal, vol.66(2016), pp.633-651.

(10) Hiroshi Nakazato,
“The development of Linear Algebra Research in Japan”,
編集者からの依頼による執筆と掲載,
査読なし,
Bulletin of the International Linear Algebra Society “Image”, vol.56(2016), pp.7-9.

(11)M.T.Chien, H. Nakazato, B.Undrakh, A.Vandanjav,
“Determinantal polynomials of a weighted shift operator”,
査読あり,
Linear and Multilinear Algebra, vol.64(2016), pp.2-13.

(12)B. Undrakh, H. Nakazato, A. Vandanjav, M.T. Chien,
“The numerical radius of a weighted shift operator”,
査読あり,

Electronic Journal of Linear Algebra, vol.30(2015), pp.944-963.

(13) Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“A new Poncelet curve for the boundary
generating curve of a numerical range”,
査読あり,
Linear Algebra and Its Applications,
vol.487(2015), pp.1-21.

(14) Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Elliptic modular invariants and
numerical ranges”,
査読あり,
Linear and Multilinear Algebra,
vol.63(2015), pp.1501-1519.

(15) Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Determinantal representations of
hyperbolic forms via weighted shift
matrices”,
査読あり,
Applied Mathematics and Computations,
vol.258(2015), pp.172-181.

(16) Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Singular points of the algebraic curves
of symmetric hyperbolic forms”,
査読あり,
Linear Algebra and Its Applications,
vol.470(2015), pp.40-50.

〔学会発表〕(計 5 件)

(1) Hiroshi Nakazato,
“Singular points of the Kippenhahn curves
for unitary bordering matrices”,
2017年7月24日,
米国, アイオワ州, アイオワ州立大学,
国際線形代数学学会.

(2) Hiroshi Nakazato,
“Unitary similarity problem
for determinantal representations”,
2017年6月17日,
ベトナム, ダナン市, Duy Tan 大学,
第6回行列解析と応用国際研究集会
The 6th International Conference on
Matrix Analysis and Applications.

(3) Hiroshi Nakazato,
“Riemann matrices for the
Hyperbolic curves”,
2016年11月10日,
京都大学数理解析研究所の
研究集会
『作用素論に基づく量子情報理論の幾何学

構造に関する研究と関連する話題』

(4) Hiroshi Nakazato, Mao-Ting Chien
“Riemann matrices for hyperbolic
curves”,
2016年6月28日,
台湾, 台北市, 東呉大学.
第13回数域=数域半径国際研究集会
(13th WONRA).

(5) Hiroshi Nakazato,
“Some contractions and the
Poncelet property of their
numerical ranges”,
2015年11月10日,
京都市, 京都大学数理解析研究所,
京都大学数理解析研究所の研究集会
『順序と幾何による作用素の構造研究と関
連する話題』.

〔図書〕(計 1 件)

(1) Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato,
“Matrix Topics and Numerical Range”,
(Lecture Notes, 105 pages)
2018年5月14日,
吉岡書店, 京都 (出版費用は著者負担による
形の出版, ISBN 番号はついていない).

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称: 発明者: 権利者: 種類: 番号: 出願年:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称: 発明者: 権利者: 種類: 番号: 出願年:
取得年: 国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中里 博 (Nakazato Hiroshi)
弘前大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 10188922