様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４８９３

研究課題名（和文）離散可積分系の代数的及び幾何学的な構造

研究課題名（英文）Algebraic and geometric properties of discrete integrable systems

研究代表者
ＷＩＬＬＯＸ　Ｒａｌｐｈ（Willox, Ralph）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：２０３６１６１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：低次元の格子上で定義される離散力学系を考察し，与えられた離散系が可積分系であるか，非可積分系であるかを判定するための手法を開発した．特に，複素射影平面上の写像が持つ特異点の分類を行い，その特異点の構造によって，写像の可積分性が判断できる手法をいくつか提唱した．また，可積分な双有理写像の幾何学的構造や対称性に基づいて，離散パンルヴェ方程式という典型的な非自励の離散可積分系を系統的に構築する方法を開発した．
さらに，超離散可積分系の代数的及び組み合わせ論的性質を用いて，２種類のソリトン・セル・オートマトンの新しい解法を発見した．

研究成果の概要（英文）：I mainly studied discrete dynamical systems defined on low-dimensional lattices and developed methods for deciding on the integrability or non-integrability of such discrete systems. In particular, I classified the types of singularities that may arise in mappings of the complex projective plane and proposed several new methods for deciding on the integrability of such mappings, based on the structure of their singularities. I also developed a systematic method for constructing discrete Painleve equations ― the prototypical discrete integrable system ― based on the symmetries and geometric structure of integrable birational maps.
Furthermore, using certain algebraic and combinatorial properties of ultradiscrete systems, I discovered new solution methods for two types of soliton cellular automata.

研究分野：数物科学・数学

キーワード：可積分系　離散可積分系　超離散可積分系

１．　研究開始当初の背景

離散可積分系に関する研究は，すでに，40年前から始まったが，未だに様々な観点から幅広く行われている．
1970年代の広田良吾の先駆的な離散化手法[1]，京都大学のグループが1980年代前半に提案した 離散可積分系の佐藤理論に基づく一般的な構成法 [2]などの研究成果は，実は，時代に先んじて，当時は十分に評価されなかった．そこで，1990年代初頭に離散可積分系を対象とする研究の急発展をもたらしたものは，まず，パンルヴェ方程式の離散版の発見[3]とそれに使われた特異点閉じ込め法の開発であり，そしてもう一つの引き金は，2次元と3次元の格子上で定義される離散可積分系の幾何学的な解釈である[4]．さらに，1990年代に起きたもう一つの重要な発展は，可積分なセル・オートマトンとそれらを離散可積分系と結ぶ超離散極限[5]の発見である．超離散可積分系の性質はまだ完全に理解されていないため，現在でも活発に研究されている．

高次元の格子上で定義される離散可積分系の一般解，またはその一般解の性質などが未だにあまり解明されていないことはこの分野でとても大きいな問題ではあるが，低次元の場合でも，例えば平面上の可積分な双有理写像，特に非自励の写像の研究においても，本研究課題を提案した段階ではとても大きな問題はたくさん残っていた．
一つは，双有理写像，特に非自励の双有理写像の可積分性が容易に判定できる厳密な手法がまだ知られていない問題であった．
もう一つの問題は，非自励の双有理写像の分類があまり解明されなかったことである．
自励系の場合には，双有理写像の反復による（一般解を表す有理関数の）次数の増大による分類は2000年代初頭に得られたが[6]，非自励の写像に関しては類似した結果は存在しない．もちろん，任意の非自励係数を持つ写像の分類は不可能だが，係数に比較的に軽い技術的な仮定をおくと，写像の次数の増大が代数幾何学的に４つのクラスに区分できることはほぼ4年前に示された．しかし，この分類においては，線形化可能な写像とそうでない写像の扱いが大きく変わる．線形化可能でない写像に関しては，坂井秀隆による分類[7]は知られているが，線形化可能な写像の分類は本研究課題を提案した段階ではまだできてになかった．

超離散系，特に箱玉系という特殊な可積分なセル・オートマトンの研究においては，結晶化（crystallization）という概念が1990年代末に現れてから，広いクラスのソリトン・セル・オートマトンの代数的構造が説明できるようになり[8]，解空間を制限した場合，初期値問題を解く方法は幾つか提案された．しかし，この数年，超離散可積分系の解空間が実数上でも考察され[9,10]，その研究で大いに役立つ解法が，実は，離散可積分系と同じような代数的な構造に基づくものであることが明らかになり，それぞれの解法の間の接点を解明する必要があった．

２．　研究の目的

本研究に，主に，次の三つの目的があった．

(1) 可積分な離散系の幾何学的または代数的な構造に基づき，離散可積分系の間の関係を明らかにし，離散パンルヴェ方程式の系統的な構築法を開発すること．

特に，写像が持つ特異点による非自励化，または豊かな自由度を持つ非自励可積分系の退化から得られる退化配列（cascade）の構成，及びその cascade に現れる様々な方程式の分類と方程式の間の関係を解明することは重要な目的であった．

(2) 低次元の離散系，特に複素射影平面上の双有理写像が持つ特異点の分類を行い，２階の双有理写像の可積分性が厳密に判定でき，簡単に適用できる手法を開発すること．

(3) 箱玉系に対する既存の解法を他の超離散系に拡張し，そう言った系の初期値問題が容易に解ける代数的かつ組み合わせ論的な手法を開発すること．
さらに，以前に，超離散 KdV 方程式における実数上の初期値問題に関して提案した解法[9,10]の代数的根拠を解明すること．

３．　研究の方法

離散パンルヴェ方程式などの低次元離散可積分系の性質を分析するとき，写像の特異点の性質を調べるために導入された「特異点閉じ込め方」という手法をさらに発展させた．
さらに，写像に対する「初期値空間」の性質を調べるときに様々な代数幾何学的な手法を用いた．

離散パンルヴェ方程式の構築には，有理楕円曲面論，特に有理楕円曲面の小木曽・塩田[11]または Persson・Miranda[12]による分類を用いた．さらに，具体的な計算には大規模の数値処理が必要であり，Mupad や Reduce という数式処理ソフトウェアも一つの重要なツールであった．

箱玉系の初期値問題に対する研究においては，組み合わせ論や表現論で開発された「KKR-bijection」は重要な道具であった．
さらに，超離散 KdV 方程式に関する研究では，離散可積分系における逆散乱法，特に

Darboux 変換による波動関数の構成法とその変換のスペクトルへの作用は重要な数学的な道具であった.

４.　研究成果

(1) 本研究計画を提案したとき，双有理写像の可積分性判定法をめぐる問題に対し，割とすぐに，とても重要な結果が得られることは想定していなかったが，実は，この問題に対する研究は初年度の 2015 年度からすぐに急加速化し，結局，この３年間で行われた研究の半分以上を占めることになった．この課題について,主に,パリ第７大学の A.Ramani と B.Grammaticos，及び東京大学・数理科学研究科の T. Mase と共同研究を行った.

まず，複素平面上の双有理写像における係数の非自励化により，写像の可積分性判定に利用される「代数的エントロピー」または「力学系次数」(dynamical degree) が比較的に簡単に計算できる手法を開発した．特に，与えられた写像が非自明なゲージ自由度を持ち，その写像の非自励化から得られ情報が決定的でない場合でも可積分性について厳密な結果が出るような手法を提唱した．さらに,その関連で，特異点閉じ込めという性質を持たない写像のエントロピーが，特殊な場合には，特異点のパターンに対する極限操作で計算できることも示した[⑪]．その手法の代数幾何学的な根拠は論文[⑩]で解説されている．厳密にいうと，この代数幾何学的根拠は２階の双有理写像の場合に限られているものではあるが，実は，同じ手法が高階の双有理写像にも適用できる証拠もあり，[⑨]ではそういった実例を幾つか紹介している.

一方, 2016 年の夏にカナダで行われた研究集会 SIDE12 にて，R. Halburd と議論できた結果，Halburd が代数的エントロピーを計算するために提案した方法[13]を大幅に簡略することに成功し，特異点閉じ込めという性質を持つ写像の dynamical degree を，特異点の配置から得られる情報のみで，既存の手法と比べて極めて容易に計算できる方法を提案することができた[⑧]．さらに，２階の双有理写像における特異点の分類が完全にでき[②]，提案した可積分性判定法を特異点閉じ込めという性質を持たない写像まで拡張することもできた[①,③].

(2) B. Grammaticos と A.Ramani との共同研究で，E_8^(1) の対称性を持つ離散パンルヴェ方程式の様々な退化から得られる離散パンルヴェ方程式を考察した．特に，自励系への極限において「非 QRT 型」と呼ばれる，高次の保存量を持つ写像に対応する新しい離散パンルヴェ方程式に注目し，幾つかの場合にその新しい方程式を既知の離散パンルヴェ方程式と結ぶ Miura 変換を構成することができた[⑦]．また，E_8^(1) の対称性を持つ q-型離散パンルヴェ方程式の様々な退化から得られる離散可積分系を考察した結果，新しい線形化可能な離散系，及びそれらの非自励化と具体的な線形化を２組，及び新しい離散パンルヴェ方程式を２つも発見した[⑥].

さらに, ある意味で, 上述の結果の逆方向で, QRT-型の（自励の）写像から出発したとき，その写像を自励極限に含み，E_8^(1)の対称性を持つ離散パンルヴェ方程式，及びそれらの方程式の cascade に属する離散パンルヴェ方程式をすべて系統的に構築できる手法も考案した[⑤].

(3) グラスゴー大学の J.J.C. Nimmo，立教大学の S. Kakei 及び京都大学の S. Tsujimoto との共同研究で，高橋・薩摩が発見した箱玉系という有名な超離散可積分系の作用・角変数による線形化を考察した結果，約 10 年前に国場・高木・竹野内に提唱された表現論的かつ組合せ論的な意味を持つ「rigged configuration」に基づく線形化に初等的な証明を与えることができ，その証明を高橋・松木平が発見した運搬車付き箱玉系の作用・角変数による線形化まで拡張することにも成功した[④].

さらに，J.J.C. Nimmo と，同じグラスゴー大学の C. Gilson との共同研究で，以前に超離散 KdV 方程式のコーシ問題に対して提案した解法を定式化することにも成功した．しかし，Jon Nimmo 氏が昨年突然に逝去されたことにより，この結果を発表する論文はまだ作成中である．この論文をできるだけ今年の夏頃に投稿する予定である.

<参考文献>

[1] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. 43 (1977) 1424--1433, 2074--2078, 2079--2086.
[2] E. Date et al., J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 4116--4131, 52 (1983) 388--393, 761--765, 766--771.
[3] A. Ramani et al., Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1829--1832.
[4] A.I. Bobenko and U. Pinkall, J. reine angew. Math. 475 (1996) 187--208.
[5] T. Tokihiro et al., Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 3247--3250.
[6] J. Diller and C. Favre, Amer. J. Math. 123 (2001) 1135--1169.
[7] H. Sakai, Comm. Math. Phys. 220 (2001) 165--229.
[8] A. Kuniba et al., Int. Math. Res. Not. 48 (2003) 2565--2620.
[9] R. Willox et al., J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) FT: 482003.
[10] A. Ramani et al., Contemporary Mathematics 580 (2012) 135-155.

[11] K. Oguiso, T. Shioda, Comment. Math. Univ. St. Paul. 40 (1991) 83-99
[12] U. Persson, Math. Z. 205 (1990) 1--47. R. Miranda, Math. Z. 205 (1990) 191--211.
[13] R. Halburd, Proc. R. Soc. A 473 (2017)20160831.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox, T. Mase, J. Satsuma, Calculating the algebraic entropy of mappings with unconfined singularities, Journal of Integrable Systems, **掲載決定済み** (2018), **査読：有**
doi.org/10.1093/integr/xyy006

② T. Mase, R. Willox, A. Ramani, B. Grammaticos, Integrable mappings and the notion of anticonfinement, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **掲載決定済み** (2018), **査読：有**
doi.org/10.1088/1751-8121/aac578

③ T. Mase, R. Willox , A. Ramani, B. Grammaticos, Singularity patterns and dynamical degrees, **九州大学応用力学研究所・研究集会報告書・非線形波動研究の新潮流 - 理論と応用**, **掲載決定済み** (2018), **査読：有** http://arxiv.org/abs/1805.10518

④ S. Kakei, J.J.C. Nimmo, S. Tsujimoto, R. Willox, Linearization of the box-ball system: an elementary approach, Journal of Integrable Systems, 3 (2018) 1-32, **査読：有**
doi.org/10.1093/integr/xyy002

⑤ R. Willox, A. Ramani, B. Grammaticos, A systematic method for constructing discrete Painlevé equations in the degeneration cascade of the E_8 group, Journal of Mathematical Physics, 58 (2017) 123504 (20pp), **査読：有**
doi.org/10.1063/1.5004764

⑥ B. Grammaticos, A. Ramani, R. Willox, J. Satsuma, Multiplicative equations related to the affine Weyl group E_8, Journal of Mathematical Physics, 58 (2017) 083502 (9pp), **査読：有**
doi.org/10.1063/1.4997166

⑦ A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox, Miura transformations for discrete Painlevé equations coming from the affine E_8 Weyl group, Journal of Mathematical Physics, 58 (2017) 043502 (10p), **査読：有**
doi.org/10.1063/1.4979794

⑧ A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox, T. Mase, Calculating algebraic entropies: an express method, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 50 (2017) 185203 (13pp), **査読：有**
doi.org/10.1088/1751-8121/aa66d7

⑨ R. Willox, T. Mase, A. Ramani, B. Grammaticos, Full-deautonomisation of a lattice equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 49 (2016) 28LT01 (11pp), **査読：有**
doi.org/10.1088/1751-8113/49/28/28LT01

⑩ T. Mase, R. Willox, B. Grammaticos, A. Ramani, Deautonomisation by singular-rity confinement: an algebro-geometric justification, Proceedings of the Royal Society A, 471 (2015) 20140956 (20pp), **査読：有**
DOI: 10.1098/rspa.2014.0956

⑪ B. Grammaticos, A. Ramani, R. Willox, T. Mase, J. Satsuma, Singularity confinement and full-deautonomisation: a discrete integrability criterion, Physica D, 313 (2015) 11-25, **査読：有**
doi.org/10.1016/j.physd.2015.09.006

〔学会発表〕（計 8 件）

⑫ R. Willox, T. Mase, A. Ramani, B. Grammaticos, **特異点閉じ込めと代数的エントロピー** II, **非線形波動研究の新潮流 - 理論と応用**, 2017 **年** 11 **月** 9 **日**, **九州大学**

⑬ R. Willox, From singularity patterns to algebraic entropies, ISQS25, the XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries, 2017 **年** 6 **月** 8 **日**, Prague, **チェコ共和国**

⑭ R. Willox, Singularity confinement, anticonfinement and algebraic entropy, AMS Fall Western Sectional Meeting, 2016 **年** 10 **月** 8 **日**, University of Denver, Denver, **米国**

⑮ R. Willox, Full-deautonomisation or how to obtain the algebraic entropy of a map from singularity confinement, SIDE XII conference: Symmetries and Integrability of Difference Equations, 2016 **年** 7 **月** 6 **日**, Sainte-Adele, Quebec, **カナダ**

⑯ R. Willox, A direct linearization of a Box & Ball system with arbitrary carrier capacity, Discrete Integrable Systems Workshop 2016 at TSIMF, 2016 年 4 月 15 日, Sanya, 中国

⑰ R. Willox, Ultradiscrete inverse scattering and an elementary linearization of the Takahashi-Satsuma box-ball system, LMS "Classical and Quantum Integrability meeting", 2016 年 3 月 11 日, University of Glasgow, スコットランド

⑱ R. Willox, Singularity confinement 2.0 : an easily implementable and sufficient integrability criterion, at last ?, 2016 Joint Mathematics Meetings of the American Mathematical Society & the Mathematical Association of America, 2016 年 1 月 6 日, Seattle, 米国

⑲ R. Willox, Ultradiscrete Inverse Scattering and Combinatorics, ICIAM 2015, 2015 年 8 月 11 日, Beijing, 中国

〔図書〕（計 1 件）

⑳ R. Willox, 離散可積分系とは何か, 「数学の現在 *e*」斎藤毅, 河東泰之, 小林俊行 （編） 東京大学出版会（2016）p. 85-101

〔その他〕
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/willox.html

6．研究組織

(1) 研究代表者

ウィロックス ラルフ（WILLOX Ralph）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：20361610