

平成 30 年 4 月 30 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04899

研究課題名(和文) 正則写像半群・ランダム複素力学系ならびにフラクタル幾何学の研究

研究課題名(英文) Research on holomorphic mappings semigroups, random complex dynamical systems and fractal geometry

研究代表者

角 大輝 (Sumi, Hiroki)

京都大学・人間・環境学研究科・教授

研究者番号：40313324

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：リーマン球面上の正則写像の半群の力学系とランダム複素力学系、付随するフラクタルの研究を行った。特に、2元生成多項式半群の空間の結果、拡大的無限生成半群の(プレ)ジュリア集合のハウスドルフ次元のBowenの公式、ランダム複素力学系の極限状態に現れる関数とその確率パラメータの偏微分に関する各点ヘルダー指数と付随するマルチフラクタル解析の結果、核ジュリア集合が空でないランダムシステムの結果と応用を得た。

研究成果の概要(英文)：I investigated the dynamics of semigroups of holomorphic maps on the Riemann sphere and random holomorphic dynamical systems. Also, I investigated fractals and fractal functions which appear in the limit states of such systems. The details are as follows.(1)I obtained many results on the parameter space of 2-generator semigroups.(2)I showed the Bowen's formula for (pre) Julia sets of expanding infinitely generated semigroups.(3)Regarding random holomorphic dynamical systems, I investigated the limit state functions and the partial derivatives of them with respect to probability parameters, and I obtained some results on the pointwise Hoelder exponents of such functions and the related multifractal analysis.(4)I investigated random dynamical systems generated by probability measures on analytic families of rational maps. I showed that generic such systems have weak stability, and applied the theory to investigate random relaxed Newton's methods to find roots of any polynomial.

研究分野：ランダム複素力学系、フラクタル幾何学

キーワード：ランダム複素力学系 フラクタル幾何学 正則写像半群 ジュリア集合 エルゴード理論 マルチフラクタル解析 複素特異関数 複素解析学

1. 研究開始当初の背景

離散時間力学系理論は純粋数学のほか、様々な分野で数理モデルとして現れる。しかし自然界・現実社会でランダム項があるので、システムにノイズを加える「ランダム力学系」を調べることが重要と思われる。またその一方で、離散時間力学系のなかで良く研究されておりかつ重要なもののひとつとして実直線上の多項式力学系がある。この場合には初期値を実数のみならず複素数全体からとることにより力学系を複素平面、リーマン球面に拡張することがより深い解析をうむ。両者のアイデアを統合して、ランダム複素力学系のアイデアにいたる。決定論的な(複素と限らない)力学系では生じないような、ランダム力学系特有の現象「ランダム性誘起現象」の発見とそのメカニズムの解明が筆者を含む多くの研究者の手により行われてきた。

筆者はリーマン球面上の正則写像の半群(以下有理半群)でコンパクトな写像族で生成されたものの力学系と、正則写像の空間上の台がコンパクトな確率測度で生成されたリーマン球面上の独立同分布ランダム複素力学系を15年以上にわたって研究してきた。両者は密接に関係する。

ランダム複素力学系では、「核ジュリア集合」(システムに属するどの写像をかましても、システムに付随する半群のジュリア集合に居続けるような初期値の集合)というものを自ら導入して、それが空になるものを主に扱っており、その場合に成り立つことを示し、ほとんどのランダム多項式力学系で核ジュリア集合が空になることなどを示していた。

2. 研究の目的

一つの正則写像の力学系では決して生じない、正則写像半群の力学系やランダム複素力学系特有の現象の発見と、そのメカニズムの証明、見通しの良い理論の組み立てとそれらの応用が大きな目的である。

これまで考えてきたことをさらに一般化して、正則写像半群でコンパクト生成とは限らないものの力学系の性質やジュリア集合(またはその部分集合)を解析することは一つの目的であった。

また、ランダム複素力学系において、核ジュリア集合が空で平均的に安定の場合では、ランダム性の影響によりシステムのカオス性が弱まり秩序性が高まっているが、ランダム力学系におけるカオスと秩序の間のグラデーションの具合を見ることが大事である(このことは筆者が気付いた大きな話題である)。極限状態に表れる関数とその確率パラメータによる偏微分を詳しく解析すること、特にそれらの関数の各点ヘルダー指数や、全微分(不)可能性などが上記の話題に直結し、なおかつフラクタル幾何学的な興味もある。実際、上記の極限状態に表れる関数 T は、フラクタル幾何学で良く調べられてきた「悪魔の階段」や「ルベークの特異関数」

の複素平面上版とみなせ、かつ T の確率パラメータの偏微分はある意味で「高木関数の複素平面上版」とみなせるのである。

さらに、核ジュリア集合が空とは限らないシステムの解析を行うこと、その重要な例としてリーマン球面上の有理写像の解析的族からなる空間上の確率測度で生成されるランダム力学系の性質を考えることも大きな目的であった。

3. 研究の方法

正則写像半群の力学系の解析と、ランダム複素力学系の解析の両者を同時に行い、発展させるという手法を取った。

正則写像半群の力学系の解析においては、複素解析学を深く用いることと、非コンパクト空間上の熱力学形式(エルゴード理論の一つの枠組み)理論を応用することにより、これまでに行ってきたコンパクト生成正則写像半群の力学系の解析手法を一般化した。

ランダム複素力学系で、平均的に安定な場合の極限状態に出現する関数やその確率パラメータに関する偏微分の解析においては、作用素の摂動理論、エルゴード理論、特にマルチフラクタル解析を深く用いた。確率パラメータに関する偏微分の各点ヘルダー指数を求める話題では、自然に表れる行列コサインの成分の大きさのオーダーを丁寧に計算し、評価する方法を用い、これが良く機能した。

また、核ジュリア集合が空とは限らないランダム複素力学系の解析においては、測度論的考察を深く用いること、核ジュリア集合の点における局所的力学系の解析、決定論的力学系における回転的領域に対してノイズの付加が与える影響の解析などを用いた。

4. 研究成果

2元生成拡大的(双曲的)多項式半群でその臨界値集合が有界なもの全体からなる空間 B を調べた。特に、 B のなかで、ジュリア集合が連結になるパラメータの集合を C とおき、ジュリア集合が非連結となるパラメータの集合を D とおく。通常の一元生成多項式力学系の話題と異なり、 D は空ではなく、非常に興味深い。 D および、「 C の境界のほとんど」に属するパラメータでは対応する半群が開集合条件を満たし、その半群のジュリア集合がBowenの公式を満たすこと(半群に付随する歪積の「圧力関数」の唯一の零点が半群のジュリア集合のハウスドルフ次元と一致すること)を示し、なおかつその次元が真に2より小さいことを示した。かつ C の内点集合は C で稠密であることを示し、以上から C の内点集合に属しかつ対応する半群のジュリア集合のハウスドルフ次元が真に2より小さいパラメータが多く存在すること、などを示した。また D および C の境界(のほとんど)の近くに属するパラメータごとに、付随する

独立同分布ランダム力学系を調べ、その核ジュリア集合が空で平均安定性を持つことを示し、特に無限遠点に収束する確率の関数がリーマン球面全体でヘルダー連続でなかつハウスドルフ次元が真に2より小さいところでのみ変化すること(よって悪魔の階段の複素平面上版とでもいふべきものになること)を示し、その関数の各点ヘルダー指数の評価、その全微分(不)可能性を詳しく調べた。以上の結果をまとめた論文を Adv. Math. に出版した。

また、コンパクト生成多項式半群で臨界値集合が有界かつジュリア集合が非連結となっているものと、付随するランダム力学系を調べ、核ジュリア集合が空となって平均安定となり、無限遠点に収束する確率の関数がリーマン球面全体でヘルダー連続となること、ある種の単調性を持つこと(ジュリア集合の連結成分全体に囲む囲まれるについての全順序が入ることが示せ、その全順序と関数の値の大小関係が対応すること)を示し、論文にまとめて雑誌 Nonlinearity に出版した。

J. Jaerisch 氏(島根大学)との、正則写像半群の力学系の共同研究において、リーマン球面上の正則写像で生成された半群で無限生成で、「拡大性」という性質を持つものを詳しく調べた。特にその半群の臨界値集合による特徴付けを行い、また、半群のジュリア集合の部分集合である「プレジュリア集合」というものを世界で初めて導入し、そのプレジュリア集合のハウスドルフ次元に対して、「Bowen の公式」(半群の生成系に付随する歪積の圧力関数の唯一の零点がプレジュリア集合のハウスドルフ次元を与えるという公式)を示した。また、これを用いて有限生成だが非拡大的であるある種の正則写像半群のジュリア集合のハウスドルフ次元が半群のポアンカレ指数の臨界指数と等しいことなどを示した。以上を論文にまとめて雑誌 Trans. Amer. Math. Soc. に出版した。なお、無限生成拡大的半群の理論は、上記のように有限生成でも非拡大的半群の解析に役立つので、単に有限生成拡大的半群の理論を無限生成の場合に一般化した以上の意味を持ち、この手法を用いて、無限生成半群、それに付随するランダム力学系、ならびに非拡大的半群やそれに付随するランダム力学系の解析などについて今後の大いなる発展が見込まれる。

次に、J. Jaerisch とのランダム複素力学系に関する共同研究において、以下を調べた。まず、一つの極小集合 A を固定した時に、リーマン球面上の各初期値 z ごとに z から出発してその極小集合 A に近づいていく確率を $T(z)$ とおいて、これを z の関数と思う。関数 T と、その確率パラメータに関する偏微分について、各点ヘルダー指数の研究、それに関するマルチフラクタル解析の研究、それらの関数の微分可能性やシステムの推移作用素の反復合成がどの指数のヘルダー指数のヘ

ルダー連続関数の空間に「良く」作用するかなどの研究を行った。特にそのような指数の下限はマルチフラクタル解析で現れるあるスペクトラムの底と一致することを示した。これらは、ランダム力学系において、ランダム性の影響によりシステムのカオス性が弱まり秩序性が高まっている状況に対して、カオスと秩序の間のグラデーションの具合を見ていることにもなり、大変重要である。以上の大半を論文にまとめて雑誌 Nonlinearity および Adv. Math. に出版した。

また、R. Stankewitz 氏(Ball State University, アメリカ)との共同研究において、有限生成有理半群のジュリア集合を描くアルゴリズムの一つである、生成系を固定してリーマン球面上の一つの点の逆像たちを取って描画する方法について、一つのパスをとるだけで描けるということを2つの論文にまとめ、Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A に出版した。

また、R. Stankewitz と須川敏幸氏(東北大)との共同研究において、一樣完全な部分集合を全く含まないようなコンパクト集合を研究し、非自励系反復関数系でその極限集合がそのような集合となるようなものを多く発見し、論文にまとめた。これは Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. S に掲載予定である。

また、筆者のみの単著研究において、有理写像の複素解析的な集合が一つ与えられたときに、その集合上の確率測度によるランダム複素力学系の理論を深化させた。この場合には核ジュリア集合が空ではないかもしれないので、種々の難しさを伴うが、そのようなシステムのうち、ある意味で大概のものは、「弱平均安定性」という、平均安定性よりは弱い秩序性を持つことを示した。なお、その弱平均安定性という概念自体を筆者はこの研究において発見して導入し、その性質を持つシステムの特徴を調べた。また、有理写像の複素解析的な集合のいくつかにおいて、そのようなランダム複素力学系の分類を行った。さらに、その理論の応用として、一つの変数複素多項式の根を探すための「ランダム緩和ニュートン法」というものを世界で初めて導入し、その理論を創始・発展させた。特に、このランダム緩和ニュートン法を用いると、従来の決定論的ニュートン法やその類似である決定論的複素力学系を用いる方法より、ランダム性の効果によって与えられた複素多項式の根をある意味で探しやすくなることを示した。この結果は、ランダム力学系の具体的な応用として非常に興味深いものであるとともに、ランダム力学系において、ランダム性による良い効果が多くあるということに期待させるという意味で、非常に画期的なものである。なお、ランダム緩和ニュートン法の結果に現れる種々の定数の評価や計算機実装などについて Doan Thai Son 氏(Vietnam Academy of Science and Technology,

ベトナム)などの様々な研究者と今後の研究方向などについて意見交換を行った。

次に、渡邊天鵬氏(大阪大学、現在京都大学大学院人間・環境学研究科)との共同研究において、独立同分布とは限らない、「マルコフ的ランダム複素力学系」の理論および、「マルコフ的有理写像システム」の理論を創始し、独立同分布の場合の理論の「核ジュリア集合が空ならばシステムの推移作用素が連続関数全体の空間に穏やかに作用し、この観点などからシステムのふるまいが決定論的複素力学系より穏やかになる」などのいくつかの結果をその場合に一般化するとともに、多項式によるシステムなどにおいて独立同分布の場合には表れない現象を発見した。

さらに、伊縫寛治氏(京都大学大学院人間・環境学研究科)、岡田熙氏(大阪大学大学院理学研究科)との共同研究において、一般化複素連分数展開に付随する1パラメータ付き無限等角復関数系の研究を行い、そのパラメータに関して、反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元が実解析的かつ劣調和的であることや、ハウスドルフ次元のところでのハウスドルフ測度が0であること(これは有限等角反復関数系と異なる現象である)を示し、現在論文にまとめている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

J. Jaerisch and H. Sumi, Dynamics of infinitely generated nicely expanding rational semigroups and the inducing method, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369, 2017, 6147-6187, <https://doi.org/10.1090/tran/6862> 査読有

J. Jaerisch and H. Sumi, Pointwise Hoelder exponents of the complex analogues of the Takagi function in random complex dynamics, *Adv. Math.*, 313, 2017, 839-874, 10.1016/j.aim.2017.04.021. 査読有

.R. Stankewitz and H. Sumi, Backward Iteration Algorithms for Julia sets of Mobius Semigroups, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A*, 36, 2016, 6475 - 6485. 10.3934/dcds.2016079. 査読有

H. Sumi, The space of 2-generator postcritically bounded polynomial semigroups and random complex dynamics, *Adv. Math.* 290, 2016, 809-859. 10.1016/j.aim.2015.12.011 査

読有

J. Jaerisch and H. Sumi, Multifractal formalism for expanding rational semigroups and random complex dynamical systems, *Nonlinearity* 28, 2015, 2913-2938.

10.1088/0951-7715/28/8/2913 査読有

H. Sumi, Random complex dynamics and devil's coliseums, *Nonlinearity* 28, 2015, 1135-1161.

10.1088/0951-7715/28/4/1135 査読有

R. Stankewitz and H. Sumi, Random Backward Iteration Algorithm for Julia sets of Rational Semigroups, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A*, 35, 2015, 2165--2175.

10.3934/dcds.2015.35.2165 査読有

[学会発表](計 32 件)

角 大輝、ランダム複素力学系におけるランダム性誘起現象とその応用、日本数学会2018年度年会函数論分科会 特別講演(招待講演)2018年

H. Sumi, Weak Mean Stability in Random Holomorphic Dynamical Systems, CIMPA-IMH-VAST research school on "Recent developments in stochastic dynamics and stochastic analysis (招待講演)(国際学会)2018年

H. Sumi, Weak mean stability in random holomorphic dynamical systems, 2017年度冬の力学系研究集会日本大学軽井沢研修所, 2018年

H. Sumi, Weak mean stability in random holomorphic dynamical systems, RIMS 共同研究(公開型)「複素力学系の研究」京都大学数理解析研究所, 2017年

H. Sumi, Weak Mean Stability in Random Holomorphic Dynamical Systems, *Random Dynamical Systems*", Lorentz Center, Leiden, オランダ(招待講演)(国際学会)2017年

H. Sumi, Weak mean stability in random holomorphic dynamical systems, 研究集会「エルゴード理論とそ

の周辺」 広島大学, 2017 年

H. Sumi, Multifractal analysis of the real and complex random dynamical systems, RIMS 共同研究 (グループ型) 「エルゴード理論の最近の発展」(招待講演), 2017 年

H. Sumi, Mean Stability and spectral gap property in random dynamical systems, RIMS 共同研究 (グループ型) 「エルゴード理論の最近の発展」(招待講演), 2017 年

H. Sumi, Finding roots of any polynomial by random relaxed Newton's methods, 2017 AMS sectional meeting, Special Session on dynamics, Geometry and Number Theory (招待講演)(国際学会) 2017 年

H. Sumi, Weak mean stability in random holomorphic dynamical systems, RIMS 共同研究 (公開型) 「ランダム力学系理論の総合的研究」京都大学数理解析研究所, 2017 年

角大輝, Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods, 京都力学系セミナー (招待講演), 2017 年

H. Sumi, Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods, Kyoto Dynamics Days: Random Dynamical Systems Theory and its Applications (招待講演), 2017 年

H. Sumi, Stability and bifurcation in random complex dynamics, Kyoto Dynamics Days: Random Dynamical Systems Theory and its Applications (招待講演), 2017 年

H. Sumi, Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods, 2017 Joint Mathematics Meeting, AMS Special Session on Ergodic Theory and Dynamical Systems, Atlanta, アメリカ, 2017 年 1 月 7 日 (招待講演)

H. Sumi, Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods, RIMS 研究集会「複素力学系およびそのモデュライ等の関連分野の研究」京都大学数理解析研究所 2016 年 12 月 12 日 (招待講演)

H. Sumi, Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods, 研究集会「エルゴード理論とその周辺」2016 年 11 月 26 日

角大輝, ランダム緩ニュートン法により任意の複素多項式の根を見つける, 東工大複素解析セミナー 2016 年 11 月 2 日 (招待講演)

H. Sumi, Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods, Conference of Complex Analysis in China 2016, Fudan University, 上海、中国、2016 年 10 月 21 日 (招待講演)

角大輝, Finding roots of any polynomials by random relaxed Newton's methods, 日本数学会 関西大学 2016 年 9 月 15 日

H. Sumi, Hausdorff Dimension of the Julia sets of Postcritically Bounded Polynomial Semigroups and the Transversality Condition, AIMS 2016 Meeting, Orlando, Florida, アメリカ, 2016 年 7 月 4 日 (招待講演)

②① 角大輝, 有限生成有理半群の Julia 集合を描くためのランダム後方軌道法, 研究集会「力学系と計算」京都大学 2016 年 3 月 25 日 (招待講演)

②② H. Sumi, Randomness-induced phenomena and negativity of Lyapunov exponents of generic random dynamical systems of complex polynomials, Workshop on Theory and Applications of Random and Non-autonomous Dynamical Systems 京都大学 2016 年 3 月 22 日 (招待講演)

②③ 角大輝, Hausdorff dimension of the Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups and transversality condition, 日本数学会 筑波大学 2016 年 3 月 16 日

②④ H. Sumi, Hausdorff dimension of the Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups and transversality condition, 2015 年度冬の力学系研究集会 日本大学軽井沢研修所 2016 年 1 月 9 日

- ②⑤ H. Sumi, Hausdorff dimension of the Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups and transversality condition, 数理解析研究所研究集会「複素力学系の深化」(招待講演) 2015 年 12 月 7 日
- ②⑥ H. Sumi, Hausdorff dimension of the Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups and transversality condition, 研究集会「エルゴード理論とその周辺」 慶応義塾大学 2015 年 11 月 27 日
- ②⑦ H. Sumi, Complex Analogues of the Takagi function in Random Complex Dynamics, AMS Sectional Meeting Special Session on Fractal Geometry and Dynamical Systems, University of Memphis, Memphis, アメリカ、2015 年 10 月 17 日 (招待講演)
- ②⑧ 角大輝、Randomness-induced phenomena and negativity of Lyapunov exponents of generic random dynamical systems of complex polynomials 第 58 回函数論シンポジウム 島根大学 2015 年 10 月 10 日 (招待講演)
- ②⑨ J. Jaerisch and H. Sumi, ランダム複素力学系に現れる複素高木関数の各点ヘルダー指数のマルチフラクタル解析、数理解析研究所研究集会「ランダム力学系理論とその応用」2015 年 9 月 28 日 数理解析研究所
- ③⑩ J. Jaerisch and H. Sumi, Complex Analogues of the Takagi Function in Random Complex Dynamics, 日本数学会 京都産業大学 2015 年 9 月 13 日
- ③⑪ J. Jaerisch and H. Sumi, Multifractal Analysis for the Complex Analogues of the Devil's staircase and the Takagi function in Random Complex Dynamics, Measurable and Topological Dynamical Systems, NIMS, 韓国、2015 年 7 月 2 日、Plenary Talk (招待講演)
- ③⑫ H. Sumi, Negativity of Lyapunov exponents of generic random dynamical systems of complex polynomials, 49th Spring Topology and Dynamics Conference, Bowling Green State University, アメリカ、2015 年 5 月 14 日、Semi-plenary talk(招待講演)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

角大輝ホームページ

<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~sumi/index-j.html>

角大輝 京都大学 大学院人間・環境学研究科 総合人間学部

https://www.h.kyoto-u.ac.jp/academic_f/faculty_f/141_sumi_h_0/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

角大輝 (SUMI, Hiroki)

京都大学大学院人間・環境学研究科・教授

研究者番号：40313324