

令和元年6月19日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04900

研究課題名(和文)無限不変測度をもつエルゴード変換群の位相モデルの解明

研究課題名(英文)Clarification on topological models for ergodic transformation groups having infinite invariant measures

研究代表者

湯浅 久利 (YUASA, HISATOSHI)

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：50363346

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：以下の3点を証明することができた。無限ルベグ空間に作用するエルゴード保測変換間の因子写像は、狭義エルゴード的局所コンパクトカントル系間の位相的半共役写像で実現される。無限ルベグ空間に作用するエルゴード変換のカテゴリーにおいて、2つの変換の共通の拡大になっている変換が存在しない因子写像の図式は、狭義エルゴード的局所コンパクトカントル系間の位相的半共役写像の図式で測度論的同型表現される。隣接行列の最大固有値と第2最大固有値がある関係を満たす非原始的代入から生成される殆ど極小なサブシフトに対応するブラッテリ-ヴェルシク表現はS-進性をもつ。

研究成果の学術的意義や社会的意義

狭義エルゴード的同型表現定理は、分野の歴史と照らし合わせると、大変に重要である。事実、確率保測エルゴード変換に対する同型表現定理はW.Kriegerによって一般的な形で解決され、エルゴード理論の教科書にはよく掲載されている。一方で、殆ど原始的代入に付随する殆ど極小サブシフトのS-進性については、全く未開の領域であり、さらには非正常性を呈することが解明できたことは、原始的代入に付随するサブシフトにはなかった新しい現象である。

研究成果の概要(英文)：I could prove the following three facts. Any factor map between ergodic measure-preserving transformations on infinite Lebesgue spaces is realized up to a measure theoretical isomorphism as a topological semi-conjugacy between strictly ergodic, locally compact Cantor systems. In the category of ergodic measure-preserving systems on infinite Lebesgue spaces, any diagram without any extension of two common transformations is realized up to a measure theoretical isomorphism as that of strictly ergodic, locally compact Cantor systems. The S-adic property is possessed by Bratteli-Vershik representations associated with almost minimal subshifts arising from non-primitive substitutions with a certain property between the maximal and second maximal eigenvalues of their incidence matrices.

研究分野：エルゴード理論

キーワード：保測変換 無限ルベグ空間 狭義エルゴード性 代入 S-進性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

エルゴード理論で扱われる重要な力学系は多様体上の滑らかな測度を保つ微分同相写像で記述されることが多かった。位相的あるいは測度論的性質を発見するため、H. Poincaré や G.D. Birkhoff は、コンパクト空間上の同相写像や測度空間上の保測変換を研究し始めた。今日では、位相力学系、測度力学系ともに様々な角度から広く研究されている。

そこで、位相力学系と測度力学系がどの程度異なるのかを明らかにすることは、基本的かつ重要な問題である。「任意のエルゴード的保測変換群 G の作用は、一意エルゴード的かつ極小な位相力学系に (測度論的) 同型表現可能であるか。」この問題を肯定的に解決すれば、測度力学系がより粗く力学系を捉えていることが、真に実証される。変換群 G の同型表現を与える位相力学系を位相モデルとよび、その同型定理をモデル定理とよぶ。

エルゴード変換群 G の不変測度が非原子的かつ無限 (∞ -有限) であるとき II 型とよび、非原子的確率測度であるとき II1 型とよぶ。作用として $G \cong \mathbb{R}$ のとき流れとよぶ。II1 型のモデル定理は先人達によって得られている。 $G \cong \mathbb{Z}$, \mathbb{R} の場合はそれぞれ W. Krieger と M. Denker-E. Eberlein によって得られ、上述の問題は肯定的に解決されている。W. Krieger の結果は Jewett-Krieger の定理として有名である。もっと一般的な可換群の場合には B. Weiss によって得られている。

$G \cong \mathbb{Z}$ の場合には、さらなる成果も知られている。ひとつは W. Krieger によるもので「エントロピー有限の II1 型変換は有限アルファベット上のサブシフトを位相モデルにもつ」という結果であり、II1 型変換には有限生成分割が存在することを意味する。さらには、N. Ormes によって「II1 型変換の位相モデルは、カントール極小系の任意の軌道同型類から取れる」ことが証明されている。この成果は Jewett-Krieger の定理と H. Dye の定理を同時に含むほどに素晴らしいものである。

2. 研究の目的

以上のように、モデル定理の解明はエルゴード理論における重要な研究テーマのひとつである。II1 型変換群のモデル定理を構築することが、本研究の統一した目的である。 $G \cong \mathbb{Z}$ の場合には、応募者の研究成果でモデル定理が得られている。この成果は、II1 型変換における Jewett-Krieger の定理のアナロジーであり、「任意の II1 型変換は、無限ラドン測度を一意不変ラドン測度にもつ局所コンパクトカントール極小系を位相モデルにもつ」ことを証明した。ここで、局所コンパクトカントール極小系とは、局所コンパクトカントール集合 (カントール集合から 1 点を除いてできる局所コンパクト距離空間) 上の極小な同相写像がなす位相力学系を意味する。この成果以前に、本研究代表者が、不変ラドン測度を一意にもつ局所コンパクトカントール極小系をサブシフトとして具体的に構成できたことが、この II1 型変換におけるブレイクスルーへの足がかりになった。

下記の命題 1~4 を肯定的に解決することが本研究の具体的目標である。以下、 G は II 型変換群とする。

1. $G \cong \mathbb{Z}$ に対して N.S. Ormes (1997 年) のアナロジーが成立する。つまり、無限不変測度をもつ任意の局所コンパクトカントール極小系の軌道同型類内に、任意の II1 型変換の位相モデルを構成できる。

2. $G \cong \mathbb{R}$ に対して M. Denker-E. Eberlein (1974 年) のアナロジーが成立する。つまり、任意の II1 型流れに対して、不変ラドン測度を一意にもつ極小な流れをその位相モデルとして構成できる。

3. $G \cong \mathbb{Z}$ に対して W. Krieger (1972 年) のアナロジーが成立する。つまり、有限 Krengel エントロピー (U. Krengel, 1967 年) をもつ任意の II1 型変換は、有限アルファベット上の局所コンパクトサブシフトを位相モデルにもつ。

4. 非原始的代入を用いて、無限測度を一意不変ラドン測度にもつ局所コンパクトカントール極小 \mathbb{Z}^d -サブシフト ($d \geq 2$) を具体的に構成する。しかも、有限アルファベット上で行う。

3. 研究の方法

2つの成果『任意のエルゴード的 II 型変換間の因子写像は、一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系間の開かつ固有な位相的半共役写像で実現される』ことと『2つの変換の共通の拡張になっているエルゴード的 II 型変換は存在しない、因子写像の任意の図式は、一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系間の開かつ固有な位相的半共役写像の図式で実現される』ことに関しては、研究代表者 (2013 年)、F. Béguin-S. Crovisier-F. Le Roux (2012 年) を参考に以下のような手法をとった。2つのエルゴード的 II 型変換 T と S の間に因子写像があるとすると、まず、研究代表者 (2013 年) の結果により S は一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系で与えられるとしてよい。 S の \mathbb{Z} -加法族 F を T の空間に持ち上げる。持ち上げた F と T の \mathbb{Z} -加法族 B それぞれに関して可測な有限分割の細分列を 2つ構成し、2つの列がそれぞれ関係する \mathbb{Z} -加法族を生成し、個々の分割が誘導するサブシフトが一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系になるようにする。この際、それぞれの列にある添え字を同にする有限分割に対し付随するサブシフト間には元の因子写像に沿った位相的半共役写像が自然に生じる。そのような半共役写像のある意味での極限を取ると、望む、一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系間の位相的半共役写像を構成できるようになる。上述

の2つの分割列を構成するために F. Béguin-S. Crovisier-F. Le Roux (2012年) による具体的なアイデアを利用し、個々の有限分割が誘導するサブシフトが一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系になるようにするために研究代表者(2013年)の成果を利用した。

次に、非原始的代入から生成されるサブシフトのブラッテリー-ヴェルシク表現を解明する問題に関しては、研究代表者(2007年), F. Durand(1998年), F. Durand-B. Host-C. Skau(1999年)などを参考にした。殆ど極小サブシフトのブラッテリー-ヴェルシク表現を得るためには、ある特定文字 a のべきとしてできる語への再帰語を調べることが最も重要になる。特に、その再帰語の(通常の意味での)長さとその文字 a をスキップして計る長さの両方を調べることが大切である。そのために、研究代表者(2007年)による結果を利用して、 a を殆ど原始的代入としたときに、各文字に a のべきを作用させて得られる語の長さとして文字 a をスキップして計る長さを評価した。この評価をもとに、文字 a のべきへの再帰語の2種類の長さとして、文字 a のべきとは限らない語への再帰語の長さを評価することに成功した。これらの評価をもとに、文字 a の n べきへの再帰語の個数は n にかかわらずに様に上から抑えられ、さらには、文字 a の $n+1$ べきへの再帰語を文字 a の n べきへの再帰語で分解したときの場合の数も n にかかわらずに様に上から抑えられることが示された。これにより、ブラッテリー-ヴェルシク表現は定常的ではないが S -進性は保たれることが解明された。

4. 研究成果

『任意のエルゴード的 II 型変換間の因子写像は、一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系間の開かつ固有な位相的半共役写像で実現される』ことと、さらに、『2つの変換の共通の拡張になっているエルゴード的 II 型変換は存在しない、因子写像の任意の図式は、一意エルゴード的局所コンパクトカントール極小系間の開かつ固有な位相的半共役写像の図式で実現される』ことを、確率測度保存系における B. Weiss 氏による成果のアナロジーとして証明することができた。この結果は論文として雑誌「Journal d'Analyse Mathématique」にて掲載決定済みであり、プレプリントサーバー arXiv に掲載済みである (<https://arxiv.org/abs/1709.05387>)。当初、上記2番目の成果を証明するうえで足りなかったのは、位相モデルの因子写像を固有写像の範疇で捉えるという視点であった。この性質は全く特別なものではなく、実際、前者の結果で得られる位相的半共役写像は自然に固有写像として得られる。因子写像が固有写像であることを仮定することにより、狭義エルゴード的(strictly ergodic)局所コンパクトカントール系の因子系として得られる局所コンパクトカントール系も狭義エルゴード的になることが示され(上記プレプリント, Corollary 2.3)、後者の結果を得るのに重要な役割を果たす補題(上記プレプリント, Lemma 6.1)を証明することができた。この結果については、今年度、2017年度冬の力学系研究集会(於:日本大学軽井沢研修所)と日本数学会年會統計数学科分會(於:東京大学駒場キャンパス)において口頭発表した。

研究代表者は以前(Journal d'Analyse Mathématique vol.102(2007), 143-180)、非原始的代入から生成されるサブシフトを位相的再帰性と不変ラドン測度の観点から調べ、完全に解明することに成功している。特に、隣接行列の最大固有値と2番目に最大な固有値となりうる2つの量 p , ρ を特定し、 $p > \rho$ のときには、サブシフトの不変ラドン測度は無限になることを得ている。さらに他方では、このサブシフトは殆ど極小になることも証明しており、R. Herman-I. Putnam-C. Skau(1992)の成果により、ブラッテリー-ヴェルシク表現可能であることになる。従って、本研究課題における、非原始的代入に関するある課題に関連して、 $p > \rho$ を満たす非原始的代入から生成されるサブシフトのブラッテリー-ヴェルシク表現を特定することは重要である。この問題は、講究録別冊(B58(2016), 97-116)においても研究代表者は提起していた(問題4)。

今回、この問題4を解くことに成功した。実際、 $p > \rho$ を満たす非原始的代入から生成される殆ど極小なサブシフトは、不動点の任意近傍に限れば線形再帰的であると証明することに成功し、さらには他の筒状集合への再帰性を評価できてきたことにより、対応するブラッテリー-ヴェルシク表現が S -進性をもつことが証明できた。また、カントール代入は該当の族に属し、具体例として、そのブラッテリー-ヴェルシク表現を計算することに成功した。従って、原始的代入のときとはことなり、ブラッテリー-ヴェルシク表現は定常的ではないが S -進性は保たれることが解明されたことになる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計2件)

H. Yuasa, "A relative, strictly ergodic model theorem for infinite measure-preserving systems", Journal d'Analyse Mathématique にて掲載決定。

H. Yuasa, "Linearly recurrent sequences and S -adic sequences", RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B58 (2016), 97-116.

[学会発表](計7件)

H. Yuasa, "Return words in subshifts arising from non-primitive substitutions", FWF/JSPS Joint Project I3346 Topology of planar and higherdimensional

self-replicating tiles 2017-2019, St. Virgil, Salzburg, Austria, February, 2019.
湯浅久利, "Strictly ergodic models for infinite measure-preserving systems", Recent Progress in Ergodic Theory, 京都大学数理解析研究所, 2018年10月.
H. Yuasa, "On first return times in subshifts arising from non-primitive substitutions", 2nd Hong Kong/Kyoto Workshop on "Fractal Geometry and Related Areas", Kyoto University, May, 2018.
湯浅久利, "無限保測変換に対する厳格エルゴード的相対モデル定理", 日本数学会 2018年度年会一般講演, 東京大学駒場キャンパス, 2018年3月.
湯浅久利, "無限保測変換に対する厳格エルゴード的相対モデル定理", 研究集会「2017年度冬の力学系研究集会」, 日本大学軽井沢研修所, 2018年1月.
湯浅久利, "Some aspects of almost minimal subshifts arising from non-primitive substitutions", 研究集会「数論とエルゴード理論」, 金沢大学サテライト・プラザ, 2017年2月.
湯浅久利, "Strictly ergodic" models for factor maps between infinite measure-preserving systems", 研究集会「エルゴード理論とその周辺」, 慶應義塾大学日吉キャンパス来往舎, 2015年11月.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等 <http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~hyuasa/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: 濱 正樹

ローマ字氏名:(Hama, Masaki)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。