

令和元年5月31日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04902

研究課題名(和文) 軌道の存在確率密度の一意性に関する研究

研究課題名(英文) The research on the uniqueness of the density functions for the existence probability of orbits

研究代表者

鷲見 直哉 (Sumi, Naoya)

熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・教授

研究者番号：50301411

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、空間が3次元以下のとき、「互いに異なる軌道の組に対して、一方の軌道の近くから他方の軌道の近くに移動する別の軌道がある」という局所的な条件のみから、次の大域的な性質を導いた：すべての軌道の存在確率密度が決まるならば、この存在確率密度は一意的に決まる。また、力学系が明記性という性質をもつとき、同様な結果を示した。

他方、明記性を持つ力学系の空間について次を示した：中心方向の次元が1次元となる部分双曲型力学系が、指数の異なる周期点の組をもつならば、明記性を持たない。

研究成果の学術的意義や社会的意義

軌道の存在状態を表す確率密度は、力学系理論の初期から扱われている基本的な研究対象である。存在確率密度の一意性は、力学系が個々の軌道に依らない1つの平衡状態をもつことを保証する。本研究により、相空間の次元が3次元以下の場合に、平衡状態の一意性という大域的な性質は、局所的な軌道同士の条件から導かれることが結論付けられた。

研究成果の概要(英文)：In this study, we proved that in the case when the ambient space is at most 3-dimensional, under the local condition that for every pair of orbits, there exists another orbit which transfers from one orbit to the other, the following global dynamical property holds: if the density function for the existence probability of orbits exists for every orbit, then it is uniquely determined. Moreover, if the dynamical system satisfies the specification property, we obtained a similar result.

On the other hands, concerning the space of all dynamical systems satisfying the specification property, the following holds: if a partially hyperbolic diffeomorphism has two saddles with different indices, and the central direction is one-dimensional, then it does not satisfy the specification property.

研究分野：数物系科学

キーワード：解析学 力学系 エルゴード理論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

軌道の存在状態(軌道が各領域に存在する時間の割合)を表す確率密度は、力学系理論の初期から扱われている基本的な研究対象である。このような確率密度をもつ測度は、Sinai-Ruelle-Bowen 測度(SRB 測度)と呼ばれ、Anosov 系や部分双曲型力学系など幾つかの力学系に対してその存在が証明されている。この確率密度に対し Palis は、力学系全体の中でジェネリックな力学系に対して、軌道の存在確率密度の存在を予想している。

### 2. 研究の目的

本研究の目標は、上記の Palis の予想を踏まえ、これら存在確率密度のもつ性質を明らかにすることである。特に、(1) 軌道の存在確率密度の一意性と、(2) 存在確率密度の時間変化の速さ、という2つの性質は重要である。なぜなら、存在確率密度の一意性は、力学系が個々の軌道に依らない1つの平衡状態をもつことを保証し、存在確率密度の時間変化の速さは、軌道がその平衡状態に近づく速さを意味するからである。ゆえに、これら2つの重要な性質を中心として研究を行う。

上記の(1)を示すことは、SRB 測度のエルゴード性を示すことであり、上記の(2)を示すことは、SRB 測度に対する大偏差原理のレート関数を決定することを意味する。

本研究では、3で述べる力学系に関する局所的な条件(\*)のもとで、SRB 測度のエルゴード性を証明すること、並びに、大偏差原理のレート関数をエントロピーとポテンシャルという2つの値を用いて具体的に表すことを目標とする。また、条件(\*)を満たす力学系を特徴付けるために、(3) 稠密な軌道をもつ力学系全体の内点となる力学系が、条件(\*)を満たすことを証明する。

### 3. 研究の方法

軌道の存在確率密度の一意性は、平衡状態という大域的状态に関わる性質であるから、それを導くためには、軌道同士が無関係に振舞っているとは考え難い。そのため本研究では、軌道同士に関する次の条件(\*)を考える：互いに異なる軌道の組に対して、一方の軌道の近くから他方の軌道の近くに移動する別の軌道がある。

更に、与えられた力学系のほとんど全ての軌道に対して、その周りの軌道が指数的な速さで離れていくか、または接近するかのいずれかである場合を考える。(すなわち、リャプノフ指数0を持たない場合を考える。)このとき、軌道に対して安定多様体と不安定多様体を考えることができ、上記の条件(\*)は、これら安定・不安定多様体が交点を持つこと、と言い換えることができる。

このような条件(\*)のもとで、上記の研究目的の達成を目指す。

本研究目標の達成により、平衡状態の一意性という大域的な性質は、局所的な軌道同士の条件から導かれることが結論付けられる。更に、軌道がその平衡状態に近づく速さも、エントロピーとポテンシャルという大域的な量によって与えられることがわかる。このような大域的な性質と局所的な条件との関係は、Viana らを中心としたこれまでの存在確率密度の研究では扱われなかったことであり、本研究により初めて明らかにされることである。

### 4. 研究成果

(1) 軌道の存在確率密度の一意性に関して次を示した：SRB 測度に対して、ほとんど全ての軌道が Lyapunov 指数0を持たないとし、また、ほとんど全ての軌道の組に対して、それらの安定多様体と不安定多様体の次元が等しく、かつ交差するとする。このとき、SRB 測度はエルゴード的である(論文)。

更に、この結果を用いて、Rodriguez Hertz らによる次の結果の別証明を与えた：稠密な軌道を持つ2次元空間上の力学系に対して、Lyapunov 指数0を持たないSRB 測度が存在するならば、この測度はエルゴード的である(論文)。

(2) 相空間の次元が低い場合に、軌道の存在確率密度の一意性に関して次を示した：相空間の次元は3次元以下とする。ほとんど全ての軌道が Lyapunov 指数0を持たないとし、また、ほとんど全ての軌道の組に対して、一方の軌道の安定多様体と他方の軌道の不安定多様体が交点をもつとする。このとき、SRB 測度はエルゴード的である(論文)。すなわち、相空間の次元が3次元以下の場合には、論文で仮定していた安定多様体と不安定多様体の次元に関する条件を落とすことができた。

不変測度が Lebesgue 測度に関して絶対連続である場合には、相空間の次元が4次元のときに、同様な結果を示すことができた(論文)。

また、相空間の次元が3次元以下とし、互いに異なる周期軌道の組に対して、一方の軌道の安定集合と他方の軌道の不安定集合が交点をもつとする。このとき、Lyapunov 指数0を持たないSRB 測度が存在するならば、この測度はエルゴード的であることを示した(論文)。

更に、力学系が明記性をもつとき、Lyapunov 指数0を持たないSRB 測度が存在するならば、この測度はエルゴード的であることを示した(論文)。ここで明記性とは、複数の軌道を近似する一つの軌道の存在を保証する性質である。

(3) 上記の結果から，明記性という条件は，軌道の存在確率密度の一意性に関する性質であることがわかる．他方，Young や Pfister-Sullivan らの結果から，明記性は存在確率密度の時間変化の速さに関する性質であることが知られている．そこで，明記性を持つ力学系のクラスの特徴づけに関して，次を示した：中心方向の次元が 1 次元となる部分双曲型力学系が，指数の異なる周期点の組をもつならば，明記性を持たない(論文)．また，幾何学的 Lorenz アトラクターは明記性をもたない(論文)．これらの結果から，明記性をもつ力学系のクラスは非常に限られたものであることがわかった．

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

N. Sumi, P. Varandas, K. Yamamoto, Specification and partial hyperbolicity for flows, *Dyn. Syst.*, 30, no.4, 2015, 501-524, 査読あり.  
DOI:10.1080/14689367.2015.1081380

N. Sumi, P. Varandas, K. Yamamoto, Partial hyperbolicity and specification, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144, no.3, 2016, 1161-1170, 査読あり.  
DOI:10.1090/proc/12830

M.Hirayama, N. Sumi, On the ergodicity of hyperbolic Sinai-Ruelle-Bowen measures: the constant unstable dimension case, 36, no.5, 2016, 1494-1515, 査読あり.  
DOI:10.1017/etds.2014.124

M.Hirayama, N. Sumi, On the ergodicity of hyperbolic Sinai-Ruelle-Bowen measures II: the low-dimensional case, 38, no.8, 2018, 3042-3061, 査読あり.  
DOI:10.1017/etds.2016.136

K.Moriyasu, K.Sakai, N. Sumi, Diffeomorphisms with Shadowable Measures, *Axioms*, 7, no.4, 2018, 1-10, 査読あり.  
DOI: 10.3390/axioms7040093

[学会発表](計 10 件)

鷲見直哉, Sufficient conditions for the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures, The Workshop on Measurable and Topological Dynamical Systems, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, South Korea, 2015 年.

鷲見直哉, On the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures for low-dimensional dynamical systems, Sino-Japanese Workshop on Dynamic Systems and Fractals, Yinyuan Hotel, Ningbo, China, 2015 年.

鷲見直哉, 低次元力学系に対する SRB 測度の一意性について, 2015 年度冬の力学系研究集会, 日本大学軽井沢研修所, 2016 年.

鷲見直哉, 低次元力学系に対するシナイ・ルエル・ボウエン測度の一意性について, RIMS 研究集会「力学系とその関連分野の連携探索」, 京都大学数学教室, 2016 年.

鷲見直哉, Topological conditions for the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures, Analysis on Fractals and Graphs Workshop, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, China, 2016 年.

鷲見直哉, Topological conditions for the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures, 散逸構造・カオス・複雑系シンポジウム～イリヤ・プリゴジン先生の業績を偲んで～, 早稲田大学染谷記念国際会館, 2018 年.

鷲見直哉, シナイ-ルエル-ボウエン測度の一意性に対する位相的条件, RIMS 研究集会「力学系-理論と応用の融合-」, 京都大学数理解析研究所, 2018 年.

鷲見直哉, Topological conditions for the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, National Taiwan University, Republic of China, 2018 年.

鷲見直哉, Topological conditions for the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures, Dynamical Systems and Related Topics, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil,

(ポスター発表) 2018 年.

鷲見直哉, Topological conditions for the uniqueness of Sinai-Ruelle-Bowen measures, エルゴード理論とその周辺, 大阪大学豊中キャンパス, 2018 年.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

なし

### (2) 研究協力者

平山 至大 (HIRAYAMA, Michihiro)

筑波大学・数理物質科学研究科・准教授

研究者番号: 50452735

鄭 容武 (CHUNG, Yong Moo)

広島大学・工学研究科・准教授

研究者番号: 20314734

山本 謙一郎 (YAMAMOTO, Kenichiro)

長岡技術科学大学・工学部・准教授

研究者番号: 30635181

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。