

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月3日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04907

研究課題名(和文) 佐藤グラスマンと多変数シグマ関数によるソリトン理論の新展開

研究課題名(英文) An approach to soliton theory by the method of the Sato Grassmannian and multi-variate sigma functions

研究代表者

中屋敷 厚 (Nakayashiki, Atsushi)

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：10237456

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：KP方程式は浅水派の方程式でソリトン解を持つことでよく知られているが、他にも様々な解を持つ。テータ関数解はその一つで、周期的解などを表す。テータ関数解は高種数の複素代数曲線すなわち穴がいくつか開いたドーナツの表面で表される曲面から構成される。周期解の周期を無限大にするとソリトン解が得られる。KP方程式には隠れた対称性があり、それを考慮に入れると複数の周期を持つ。そのためテータ関数解の極限として様々な興味深い解が現れる。しかしこの極限の厳密な計算には技術的な困難があり難しかった。本研究では、佐藤グラスマンを用いることにより困難を回避し、多くの平面代数曲線に対してテータ関数解の極限を計算した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ソリトンは非線形波動の一種で厳密な解析が可能であることから数学的にも応用上も多方面から研究されてきた。ソリトンを記述する方程式はソリトンの他にも様々な解を持つ。テータ関数解はその一つでソリトンはその極限であると考えられている。極限を厳密に計算することは種々の観点から興味のある問題であるが技術的に難しい問題であった。本研究では佐藤グラスマンの方法という新しい方法を提案しそれが確かにテータ関数解の極限の計算に有効であることを様々な例で実証した。この方法は平坦でない波の上に来るソリトンやrogue wavesなど最近活発に研究されている問題に新しい研究方法を提供すると期待される。

研究成果の概要(英文)：The KP equation describes shallow water waves and is known to possess soliton solutions. It has several other solutions. The class of solutions expressed by theta functions is one of them. They describe periodic solutions for example. A theta function solution is associated with a complex algebraic curve which, geometrically, is considered as a surface with several holes. If we tend the period to infinity of a periodic solution, then the solution approaches to a soliton solution. The KP equation has hidden symmetries. Then a theta function solution has several independent periods. Therefore there are several ways to tend periods to infinity. Consequently various curious solutions can appear as limits of a theta function solution. However there were technical difficulties in taking these limits.

In the present research we have overcome these difficulties by the method of the Sato Grassmannian and computed limits of theta function solutions for various families of plane algebraic curves.

研究分野：可積分系とテータ関数

キーワード：一般化ソリトン KP方程式 通常3重点 佐藤グラスマン リーマンテータ関数 多変数シグマ関数 タウ関数 準周期解

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

KP 階層のソリトン解について、従来のソリトン解の研究では見逃されていた構造が児玉裕二らにより発見されここ 10 年間で新しい研究が進展した。すなわち従来の研究では n ソリトン解は単に平面上の n 本の直線として表されるのに対して、新しく研究されたソリトン解は、平面上の様々な網目模様として表される。その模様は、完全非負グラスマン多様体と呼ばれる図形の組み合わせの構造から決定される。網目模様の間の変換は、リー代数の表現論に起源をもつクラスター代数の言葉で記述される。このような状況でソリトン解以外の解についてはどうなっているのかという問いが問題とされつつあった。

2. 研究の目的

ソリトン解は種数ゼロの代数曲線、つまり穴のない球面に対応した解である。KP 階層には種数の高い代数曲線、つまり穴がいくつか開いた曲面に対応するテータ関数解と呼ばれる解がある。球面は穴の開いた曲面で穴を次々ピンチしてゆくことにより得られるので、ソリトン解はテータ関数解の極限と考えられる。そこでテータ関数解にもソリトン解のような組み合わせ的構造があるのではないかと期待される。

そこでテータ関数解の極限をきちんと計算しソリトン解の構造を参考にしながら、テータ関数解の織り成す模様、組み合わせ的構造を解明するという目的を設定した。

3. 研究の方法

最初にすべきことはテータ関数解の極限を厳密に計算することである。このためには代数曲線から定まる周期が、曲線の退化によりどうなるかを研究する必要がある。しかしこれは技術的に難しい問題で従来は超楕円曲線とよばれる代数曲線以外極めて少数の例についてしか計算されていなかった。この困難を打開するため、本研究では佐藤グラスマンと多変数シグマ関数を用いて研究するという方法を考えた。佐藤グラスマン、多変数シグマ関数共に代数曲線の周期を経由することなく代数曲線の定義方程式から直接記述することが可能であるため、従来の困難を回避することができると考えたからである。

4. 研究成果

(1) (n, s) 曲線と呼ばれる超楕円曲線をその一部として含む広いクラスの平面代数曲線族に対して、種数ゼロの曲線への極限を考え、それに伴うテータ関数解の極限を佐藤グラスマンを用いて厳密に計算した。こうして得られる解を記述するため一般化ソリトンと呼ばれる概念を導入した。一般化ソリトンは特別な場合にテータ関数解の退化とは異なる筋での研究で V. Matveev によりポジトンと呼ばれる名前を導入されていた解と同じものであることが論文発表後分かった。

この (n, s) 曲線に関する結果は超楕円曲線以外でテータ関数解の種数ゼロへの極限を系統的に厳密に計算した初めての例となった。これにより解の極限の計算に佐藤グラスマンが有効であることが具体例で実証された。

(2) (1)の結果を踏まえてより複雑な退化について研究した。

(2.1) 1 つ目は可約な曲線への退化である。(1)の研究では種数ゼロの曲線として既約なものを考えていた。これは球面 1 個で表される図形である。これに対し種数ゼロの可約な曲線とはいくつかの球面を何点かでつなげた図形である。超楕円曲線の可約曲線への退化を考えることによりテータ関数解の極限として得られるソリトン解の自由度が上がることは S. Abenda による先行研究で分かっていた。ただ Abenda の結果はテータ関数解の極限を計算するのではなく、種数ゼロの曲線から直接ソリトン解を構成したものである。本研究では佐藤グラスマンの方法を用いて超楕円曲線の可約曲線への退化に伴うテータ関数解の極限を厳密に計算し、Abenda の結果が再現されることおよび Abenda が考察していなかったクラスの解も得られることを示した。

(2.2) 2 つ目は種数が 1 下がる場合への退化である。(1)、(2.1)の研究では、穴がいくつかあいた曲面(高種数曲線)から穴のない曲面(種数ゼロ曲線)への退化を考えたが、穴を 1 つつぶす退化が分かればそれを繰り返すことにより穴のない曲面への退化も分かるだろうというアイデアである。ただ、一般化ソリトンなど種数ゼロの曲線に対応する解が指数関数や有理関数を用いて記述できたのに対し、高種数曲線に対応する解はまたテータ関数であらわされ扱いが格段に難しくなる。しかし佐藤グラスマンの方法はこの場合も極めて有効に機能し、種数が 1 下がる場合の退化に伴う、テータ関数解の極限を、種数が 1 下がった曲線のテータ関数解 2 つの 1 次結合で具体的に表す公式を証明することが出来た。さらに KP 階層の解の多変数シグマ関数による表示を代入することにより、シグマ関数の退化に関する同様の公式を証明した。これは J. Bernatska, D. Leykin による種数 2 の場合の結果を全く異なる簡明な方法により一般の種数の場合に拡張したものである。多変数テータ関数に対するこのような公式は従来ほ

とんど知られておらず、純粋に数学的な結果としても新しい重要なものと考えられる。また、テータ関数の高種数曲線への退化を厳密に計算する問題には従来有効な方法が存在しなかった。今後、佐藤グラスマンの方法によりテータ関数やソリトン方程式のテータ関数解の極限を求める研究が大きく進展することが期待される。それはさらに背景波が準周期波であるソリトンや rogue waves の研究等に応用されることも期待される。

この(2.2)の研究は、当初研究目的としていたテータ関数解の代数的・組み合わせ的構造解明の研究を途中変更し、高種数曲線への退化を研究することにより得られた結果である。これは、佐藤グラスマンの方法が予想以上に退化の研究に有効であることが研究する中で判明したことが大きい。種数ゼロの極限で多様なソリトン解を得るには、平面代数曲線だけでなく、空間曲線などより複雑な曲線を考察する必要があることが判明しそれは現時点では難しいと判断したということもある。ただ後者の問題についても佐藤グラスマンの方法は有効であることが期待され、今後の重要な研究課題の一つと考えられる。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 件)

1. [Atsushi Nakayashiki](#), Reducible degenerations of hyperelliptic curves and soliton solutions, *Symmetry, Integrability and Geometry:Methods and Applications*, 査読有 Vol.15-009, 2019, 18 pages
DOI:10.3842/SIGMA.2019.009
2. [Atsushi Nakayashiki](#), Degeneration of trigonal curves and solutions of the KP-hierarchy, *Nonlinearity*, 査読有, Vol. 31, 2018, 3567-3590,
DOI:10.1088/1361-6544/aabf00
3. [Atsushi Nakayashiki](#), Soichi Okada and Yoko Shigyo, On the expansion coefficients of KP tau function, *Journal of Integrable Systems*, 査読有, Vol. 2, 2017, 1-23
DOI:10.1093/integr/xyx007

〔学会発表〕(計 9 件)

1. 中屋敷 厚、佐藤グラスマンは解の具体的計算に使える、可積分系ウィンタースクール at 本庄早稲田、2018
2. Atsushi Nakayashiki, Tau function approach to degenerations of hyperelliptic sigma functions, BIRS workshop "Tau Functions of Integrable Systems and Their Applications", 2018
3. Atsushi Nakayashiki, Degeneration of trigonal curves and corresponding solutions of the KP-hierarchy, Workshop on Calabi-Yau manifolds, Arithmetic, Geometry and Physics, 2017
4. Atsushi Nakayashiki, Solutions of the KP-hierarchy corresponding to degenerate trigonal curves, *Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena, 50 years of I.S.T.*, 2017
5. 中屋敷 厚, 特異有理曲線から構成される KP 階層の解について、可積分系数理の現状と展望、2016
6. Atsushi Nakayashiki, Singular rational curves and solutions of the KP hierarchy, *Infinite Analysis 16 Summer School*, 2016
7. Atsushi Nakayashiki, On the character formula of the D-module associated to KdV hierarchy, KIAS workshop on Integrable Systems and Related Topics, 2016
8. Atsushi Nakayashiki, Combinatorial structure of some D-modules on Abelian varieties, Tsuda College Mini-Workshop on Calabi Yau Varieties : Arithmetic Geometry and Physics, 2015
9. Atsushi Nakayashiki, Character formulae of some D-modules on hyperelliptic Jacobians, *Geometry Days in Novosibirsk*, 2015

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：山田 泰彦
ローマ字氏名：(Yamada Yasuhiko)
研究協力者氏名：井上 令
ローマ字氏名：(Inoue Rei)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。