

令和 2 年 7 月 7 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04908

研究課題名(和文) D加群の近接輪体の一般化と境界値問題への応用

研究課題名(英文) Generalization of Nearby cycles for D-modules and its application to boundary value problem

研究代表者

山崎 晋 (YAMAZAKI, Susumu)

日本大学・理工学部・教授

研究者番号：00349953

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：Laurent, Monteiro Fernandes が定義した Fuchs型D加群に対し，従来の近接輪体，消滅輪体加群の定義を一般化し，通常の逆像，及び捻れ逆像と，特殊三角形を用いて結びつけ，それらが導来圏に於ける8面体公理によって関連する事が証明出来た．更に整型函数解及びその特殊化，整型超函数解，整型超局所函数解に対する一意可解性定理を証明する事が出来た．その応用として佐藤超函数解に対する境界値問題を定式化し，境界値問題の解の一意性，及び或る種の双曲性条件の元での可解性を証明する事が出来た．

研究成果の学術的意義や社会的意義

或る種の形式的無限階偏微分作用素を導入する事で，複素領域に於いて Fuchs 型 D 加群に対しても，正則特殊化可能 D 加群と同様の結果を証明する事が出来た．結果として，D 加群論に貢献出来たと考えている．更にその応用として，実領域に於いて，非特性型，特性型の両方を含む Fuchs 型 D 加群の佐藤超函数解に対し，線型偏微分方程式論の最も基本的な問題の一つである境界値問題の定式化が成功した事は重要であると考えられる．特に解の一意性，及び或る種の双曲性条件の元での可解性等，満足すべき結果が得られた．

研究成果の概要(英文)：In the framework of algebraic analysis, we extend definitions of nearby and vanishing cycle modules to Fuchsian D-modules in the sense of Laurent-Monteiro Fernandes, and obtain unique solvability results in the complex domain in holomorphic category. We also give distinguished triangles connecting nearby and vanishing cycle modules, ordinary and extraordinary inverse images, that are related by the octahedral axiom. These distinguished triangles induce the relations between solution sheaves of holomorphic functions, of specializations of holomorphic functions, of holomorphic hyperfunctions, and of holomorphic microfunctions. As an application, a general boundary value morphism is defined for any hyperfunction solutions to the Fuchsian D-modules in derived category, and the injectivity of this morphism in zero-th cohomology is proved (uniqueness of the solution). Moreover, under a kind of hyperbolicity condition, it is proved that this morphism is surjective (solvability).

研究分野：数学

キーワード：D加群 境界値問題 超局所解析 佐藤超函数 近接輪体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Fuchs 型 D 加群は, M. S. Baouendi, C. Goulaouic が導入した Fuchs 型偏微分作用素の方程式系版であり, Y. Laurent, T. Monteiro Fernandes によって定義された. この D 加群は非特性型その他, 田原秀敏の Fuchs Volevic 系, 正則特殊化可能(regular-specializable) D 加群という初期面で退化する特性系を含む, 重要な D 加群のクラスの一つである. ここで Fuchs 型偏微分作用素は常微分方程式論に於ける確定特異点型常微分作用素を形式的に偏微分作用素に拡張したものであり, 佐藤超函数論の立場からは, 田原秀敏, 大阿久俊則等の研究がある. 正則特殊化可能 D 加群は柏原正樹によって導入された D 加群のクラスの一つであり, 正則ホロノミー (regular holonomic) D 加群と密接な関係がある. この D 加群に対しては, 当初の柏原, B. Malgrange, Z. Mabkhout, C. Sabbah 等の純代数的な手法による研究のアプローチの後, Laurent による第 2 超局所解析を用いた作用素論的な研究が発展し, 種々の結果が現在迄に得られている.

一方 D 加群の近接輪体加群は, 柏原によって消滅輪体 (vanishing cycle) と共に代数的に定義され, Laurent により, 上述の通り第 2 超局所解析を基にした作用素の変換論を用いて再定式化された. 特に Laurent は近接輪体加群, 消滅輪体加群, D 加群の範疇に於ける逆像, 捻れ逆像を結びつける特殊三角形 (distinguished triangle) が存在し, それ等が導来圏に於ける 8 面体公理によって関連している事を証明した. 更に Laurent は複素領域に於ける境界値問題を函手的に定式化し, 一意可解性定理も得ている. これらの諸結果は, 実際はいわゆる特殊化可能 (specializable) D 加群という, 初期面に沿った b 函数の存在のみを仮定するクラスに対して考察されていたが, 後に Laurent はより広いクラスの D 加群に対して消滅輪体の定義を拡張している. しかし近接輪体は定義されておらず. 又, Fuchs 型 D 加群に対しても未だ消滅輪体は定義されていない.

以上は複素領域に於ける結果であるが, Laurent, Monteiro Fernandes はそれらの結果を援用し, 実領域に於いて, 正則特殊化可能 D 加群の佐藤超函数解に対し一般的な形で境界値問題を定式化し, 解の一意性, 及び或る種の双曲性条件の元で可解性を論じた. その際, 境界値の満たす方程式系は近接輪体となる. 但し Laurent, Monteiro Fernandes の主張に反し, Fuchs 型 D 加群に対する佐藤超函数に対しては一般的な境界値は定義されていない.

2. 研究の目的

本研究の目的は, 研究開始当初の背景で述べた状況を踏まえ, D 加群の近接輪体の定義を一般化し, 実領域に於ける解析的線型偏微分方程式系の境界値問題を考察する事である. 即ち,

(1) 或る種の作用素 (解析的擬微分作用素 (pseudodifferential operator) 等) の表象理論 (symbol theory) 等を用いて, より広いクラス, 特に Laurent, Monteiro Fernandes によって導入された Fuchs 型 D 加群に対して近接輪体加群, 更には消滅輪体加群を定義する. 更に, これらの加群と, 通常逆像加群, 及び捻れ逆像加群との関連を調べる.

(2) (1) の応用として佐藤超函数解に関する境界値問題を導来圏の中で函手的に定式化し, 一意性, 可解性を論ずる. 特に, 可解性の条件 (双曲性) を明確にする.

3. 研究の方法

(1) 最初に, Fuchs 型 D 加群の消滅輪体の定義の為, 新たな作用素の変換論を確立する. その為, 田原の研究を踏まえて大阿久が導入した, 或る種の無限階微分作用素を層係数コホモロジーを用いて再定義し, その性質を調べる. この作用素は, 局所性を持たない形式的無限階微分作用素であるが, Fuchs 型偏微分作用素, Fuchs Volevic 系の解析に, 田原, 大阿久により極めて有効的に使われた. 通常この種の作用素は, 余接繊維束 (cotangent bundle), 余法繊維束 (conormal bundle) 上に定義されるのだが, 近接輪体を定義する際には, 問題を接繊維束 (tangent bundle), 法繊維束 (normal bundle) 上で考える必要がある. そこで, 大阿久のアイディアに従って特殊化 (specialization) 函手を適用して作用素の定義をするという, 通常超局所解析とはやや異なるアプローチを取る.

柏原に依る近接輪体加群, 消滅輪体加群の定義はフィルターを用いた極めて代数的なもので, 作用素の変換論は用いていない. それに続く Sabbah の研究も同様である. 一方 Laurent は上述の通り作用素の変換論を用いて先に消滅輪体を定義する一方, 近接輪体は特殊三角形を用いて間接的に定義されている. 従って, 各々の定義の整合性の確認が必要である.

(2) こうした基礎付けの後, 佐藤超函数解の境界値問題に取り組む. この方面では, 代数解析, 超局所解析の視点で, 導来函手をを用いた一般的な枠組みが或る程度出来ているので, これらの成果を充分活用したい. 又, 境界値問題の超局所化も平行して考察する. その際, Fuchs 型偏微分作用素, Fuchs Volevic 系に対する萬代武史, 田原の複素領域に於ける研究, 及びその佐藤超函数解に対する田原, 大阿久の研究は, 大変重要であり大いに参考になる.

4. 研究成果

我々が得た結果は以下の通りである.

(1) 複素領域に於いて、複素超曲面の法繊維束上に、新たな作用素の層を函手を用いた代数的手法で定義出来た。この作用素の層は解析的無限階偏微分作用素の拡大環であり、解析的無限階偏微分作用素の特殊化とも看做される。更に田原秀敏が Fuchs 型偏微分作用素及び Fuchs Volevich 系の解析に用いるため導入した、或る種の形式的無限階偏微分作用素も含む事が示される。又、座標系を用いた具体的表示も得られた。これから、積、形式共軛といった諸演算に対しても、コホモロジーを用いた抽象的な表現、座標系による具体的表示の両方を適用する事が出来る。

(2) (1)で述べた作用素を用い、一般の D 加群に対して、我々の意味の近接輪体加群 (nearby cycle module) を函手的に定義した。この加群は、Baouendi, Goulaouic の意味の m 階 Fuchs 型偏微分作用素、或いは田原の意味の m 階 Fuchs Volevich 系に対しては、解析的無限階偏微分作用素の m 個の直和となるという最も基本的且つ重要な結果が証明出来る。これらの証明には、萬代、田原の Fuchs Volevich 系に対する研究、及び柏原、大島利雄の確定得点型に関する研究を大いに活用した。

(3) Fuchs 型 D 加群に対し、複素領域に於いて消滅輪体加群 (vanishing cycle module) を、近接輪体加群のフーリエ佐藤変換像として定義した。更に、近接輪体加群、消滅輪体加群、 D 加群の範疇に於ける逆像、捻れ逆像を結びつける特殊三角形の存在を示し、更にそれ等が導来圏に於ける 8 面体公理によって関連している事も証明する事が出来た。これは Laurent による結果の Fuchs 型 D 加群への一般化を与えている。

(4) (3) の応用として、Fuchs 型 D 加群に対して複素領域に於ける境界値問題を函手的に定式化し、一意可解性定理を得た。特に近接輪体加群を用いて、整型函数 (holomorphic function) の特殊化 (specialization) 解に対する一意可解性定理、消滅輪体加群を用いて、実整型超局所函数 (real holomorphic microfunction) 解に対する一意可解性定理を得る事が出来た。これらは、正則特殊化可能 D 加群の場合の柏原、Laurent, Sabbah 等の諸結果の拡張となっている。

(5) (4) の結果の実領域への応用として、Fuchs 型 D 加群の佐藤超函数解に対し、境界値問題を導来圏論を援用して定式化する事が出来た。我々が定義した境界値を与える型射 (morphism) は、 0 次コホモロジーに於いて単型射 (monomorphism) である。これは即ち、境界値問題に於ける解の一意性定理を表している (Holmgren 型定理)。更に、或る種の双曲性条件 (near-hyperbolicity と呼ばれる) の下で、我々の境界値型射が導来圏に於ける同型射 (isomorphism) を与える事が証明出来た。これは境界値問題の一意可解性定理を意味する。この副産物として、特に第 2 超函数解に関する一意可解性定理が得られる。以上の結果は、大阿久による超局所的な定式化も可能である。又、Laurent, Monteiro Fernandes が正則特殊化可能系の佐藤超函数解に対して証明した結果の拡張ともなっている。尚、可解性の証明は、柏原、P. Schapira の超局所台 (microsupport) の理論を的確に応用する事で得られる事に注意しておく (正則特殊化可能 D 加群に対して同様の結果を述べている Laurent, Monteiro Fernandes の証明には残念ながら誤りがある)。

(6) 我々が定義した接続 D 加群の導来圏に於ける近接輪体函手、消滅輪体函手と、Laurent が定義した近接輪体函手、消滅輪体函手とは、定式化が異なっている。我々は幾何学的には法繊維束上の解析によって定式化をしているが、Laurent は第 2 超局所解析を用い、余法繊維束上での解析によって定式化をしている。この時、我々の幾何学的仮定の下では、互いの理論が Fourier 佐藤変換によって関連付けられ、函手的な対応関係がある事が証明出来た。その結果、我々の近接輪体加群、消滅輪体加群は、導来圏に於ける対象として従来の正則特殊化可能 D 加群の近接輪体加群、消滅輪体加群の一般化を与え、既に知られている D 加群論に於ける近接輪体加群、消滅輪体加群の理論との整合性を示す事が出来る。更には附随する種々の特殊三角形についても同様の結果が得られる。特に、正則特殊化可能 D 加群に対する柏原、Laurent, Sabbah 等による従来の近接輪体加群、消滅輪体加群に無限階偏微分作用素をテンサーしたものが我々の近接輪体加群、消滅輪体加群となる事が判る。これらの証明には、解析的無限階擬微分作用素の形式表象理論を元にした、実整型超局所函数の形式表象の理論、特に座標変換公式を用いる。但し、形式表象理論を援用して実整型超局所函数を取り扱う際、既知の結果だけでは多少不足な点があり、注意が必要である。

以上の諸結果は、既に幾つかの講演で口頭発表し、証明の概略を含めて報告集等で公表している。又、現在、詳細な証明付きの論文を準備、執筆中である。

(7) 正則特殊化可能系に関する佐藤超函数解の境界値問題の定式化、及び境界値型射 (boundary morphism) の定義に関しては、(a) Monteiro Fernandes による定義 (1992)、(b) Monteiro Fernandes による再定義 (1994)、(c) Laurent, Monteiro Fernandes の共著による導来圏での定式化 (1998)、という 3 つの論文が知られている。これらで与えられた境界値型射については、

論文(c)に於いて(b), (c)での型射の同値性が述べられているが, 証明の議論に不十分な点がある. 又, (a)での型射との同値性については, 明示的に証明されている文献が見つからなかった. 更に (a) は柏原による代数的手法, (c) は Laurent による第 2 超局所解析による手法に, それぞれ基づいており, アプローチがやや異なる事にも注意する. そこで (a), (b), (c)で与えられた境界値型射が全て同値である事を証明した. 実際, その証明には(c)で用いられた余法繊維束上の整型超局所函数解に関する結果だけでは不十分で, 法繊維束上の整型函数の特殊化解に関する結果が必要となる. これに関しては, 田原による Fuchs Volevich 系に対する結果を適用すれば必要な結果が得られる事が判る.

副産物として, 以前に私が定義した, 正則特殊化可能系に対する分布 (distribution), Gevrey 超分布 (ultradistribution) 解の境界値の両立性も明確になった.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 6件）

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Takashi Aoki, Naofumi Honda and Susumu Yamazaki | 4. 巻 69 |
| 2. 論文標題 Foundation of symbol theory for analytic pseudodifferential operators, I | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan | 6. 最初と最後の頁 1715-1801 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/06941715 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

| | |
|---|----------------------|
| 1. 著者名 Susumu Yamazaki | 4. 巻 2020 |
| 2. 論文標題 Boundary value problem for hyperfunction solutions to Fuchsian systems | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku | 6. 最初と最後の頁 96-113 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Naofumi Honda, Luca Prelli, Susumu Yamazaki | 4. 巻 144 |
| 2. 論文標題 Multi-microlocalization and microsupport | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 Bulletin de la Societe mathematique de France | 6. 最初と最後の頁 569-611 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.24033/bsmf.2723 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 該当する |

| | |
|---|----------------------|
| 1. 著者名 Naofumi Honda, Luca Prelli, Susumu Yamazaki | 4. 巻 B57 |
| 2. 論文標題 Multi-microlocalization | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu | 6. 最初と最後の頁 93-115 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Susumu Yamazaki | 4. 巻 B57 |
| 2. 論文標題 Boundary value problem for hyperfunction solutions to Fuchsian systems | 5. 発行年 2016年 |
| 3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu | 6. 最初と最後の頁 175-194 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|---|------------------------|
| 1. 著者名 Susumu Yamazaki | 4. 巻 139 |
| 2. 論文標題 Microlocal Cauchy problem for distribution solutions to systems with regular singularities | 5. 発行年 2015年 |
| 3. 雑誌名 Bulletin des Sciences Mathematiques | 6. 最初と最後の頁 628--666 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.bulsci.2014.11.005 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 6件)

| |
|--|
| 1. 発表者名 Susumu Yamazaki |
| 2. 発表標題 Division Theorem of Ultradistributions by Fuchsian Systems and Boundary Value Problem |
| 3. 学会等名 Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 山崎 晋 |
| 2. 発表標題 D 加群の Vanishing Cycle と作用素の理論 |
| 3. 学会等名 代数解析学の諸問題 (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Susumu Yamazaki |
| 2. 発表標題 Microsupport of Formal Microlocalization Solutions to Systems with Regular Singularities and Its Applications |
| 3. 学会等名 Workshop on Algebraic Analysis and Asymptotic Analysis in Hokkaido (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Susumu Yamazaki |
| 2. 発表標題 Boundary Value Problem for Hyperfunction Solutions to Fuchsian Systems |
| 3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Partial Differential Equations - Padova (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Susumu Yamazaki |
| 2. 発表標題 Microlocal boundaty value problem for Fuchsian D-Modules |
| 3. 学会等名 Various Problems of Algebraic Analysis Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis RIMS (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Susumu Yamazaki |
| 2. 発表標題 Boundary Value problem for Hyperfunction Solutions to Fuchsian Systems |
| 3. 学会等名 Algebraic Analysis in Yamaguchi (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Susumu Yamazaki |
| 2. 発表標題 Nearby and Vanishing Cycles of Fuchsian D-Modules |
| 3. 学会等名 超局所解析と漸近解析 (招待講演) |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 山崎 晋 |
| 2. 発表標題 解析的範疇の無限階擬微分作用素とその表象 |
| 3. 学会等名 日本数学会2016年秋季総合分科会函数解析学分科会特別講演 (招待講演) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|----------------------------------|
| 1. 発表者名 山崎 晋 |
| 2. 発表標題 Fuchs 型 D 加群の近接及び消滅輪体 |
| 3. 学会等名 代数解析奈良研究集会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Susumu Yamazaki |
| 2. 発表標題 Boundary value problem for hyperfunction solutions to Fuchsian systems |
| 3. 学会等名 Algebraic Analytic Methods in Complex Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2015年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|--|--------------------------------------|----|
| 研究協力者 | 青木 貴史 (AOKI Takashi) (80159285) | 近畿大学・理工学部・教授 (34419) | |
| 研究協力者 | 本多 尚文 (HONDA Naofumi) (00238817) | 北海道大学・大学院理学研究院・教授 (10101) | |