様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４９０９

研究課題名（和文）可積分系理論を基盤とした大変形現象の数値計算のための自己適合移動格子法の開発

研究課題名（英文）Development of self-adaptive moving mesh methods for numerical computations of phenomena with large deformation based on the theory of integrable systems

研究代表者
丸野　健一（Maruno, Kenichi）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：８０３８０６７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：大振幅非線形波動を記述する偏微分方程式の解の構造を保存する差分スキームの構築法の確立とその数値計算法への応用に向けて、これまで離散化に成功していなかったタイプの非線形波動方程式（多成分系、３次元渦糸問題、水面波の数理モデル、水の土壌への浸透を記述する数理モデルなど）の解の構造を保存する離散化を行い、様々な方程式に対して自己適合移動格子スキームを構築することに成功した。さらに、それらを用いた数値計算の精度の検証を行い、自己適合移動格子スキームの有効性を示した。また、自己適合移動格子スキームと離散微分幾何学との関係についても詳しく調べた。

研究成果の概要（英文）：We developed the theory of integrable discretization of nonlinear wave equations and self-adaptive moving mesh schemes. We constructed discrete analogues of coupled short pulse equation, coupled Yajima-Oikawa system, reduced Ostrovsky equation, modified short pulse equation, Degasperis-Procesi equation based on the theory of integrable systems. We also studied accuracy of numerical computations of our self-adaptive moving mesh scheme of the modified short pulse equation which has cusped soliton solutions. We also studied numerical schemes of a mathematical model of one-dimensional soil water infiltration using self-adaptive moving mesh schemes and we verified its numerical accuracy. We also investigated the relationship between self-adaptive moving mesh schemes and discrete differential geometry.

研究分野：応用数学，非線形波動，応用可積分系，数理物理、数値計算法

キーワード：自己適合移動格子スキーム　非線形波動　可積分離散化　構造保存型差分スキーム　離散微分幾何学

１．研究開始当初の背景

１９６５年のZabuskyとKruskalによるソリトンの発見以来、非線形波動･可積分系分野の研究は様々な分野と相互作用をしながら発展してきた。特に、１９７０年代半ばの広田良吾氏と Mark Ablowitz 氏のソリトン方程式の可積分性を保つ離散化の試みは１９９０年代に入って大きく花開いた。中でも、ベルリン工科大学グループの Bobenko 氏と Pinkall 氏による（広田氏が発見した）離散サイン-ゴルドン方程式を元にした離散微分幾何学の提案（１９９６年）とそれに続く離散微分幾何学のCG分野への応用の試みは離散可積分系研究が他分野との相互作用により新たな応用を作り出しうることを示唆している。また、京都大学の中村佳正氏らのグループによる離散可積分系の特異値分解アルゴリズムへの応用も離散可積分系の研究で培われた知見を元にして実用可能な数値計算アルゴリズムが作れることを示唆しており、離散可積分系研究で培われてきた知見を他分野に応用することによって、新しい手法、アプローチが生まれる可能性がある。最近、代表者ら(テキサス大・Feng氏、神戸大・太田氏)は、可積分系研究で発展した手法、知見を用いて、特異性のある解を持つ非線形偏微分方程式（浅水波を記述する Camassa-Holm方程式、Helle-Shaw流を記述する Harry Dym方程式、超短光パルスを記述する短パルス方程式など）の解の性質（厳密解や保存量）を保存する差分スキームの開発に成功した。それはメッシュが特異性のある部分周辺で自動的に細かく刻まれ時間とともにメッシュが動いていく差分スキームで、代表者らはこれを「自己適合移動格子スキーム(Self-adaptive moving mesh scheme)」と名付けた。いくつかの非線形偏微分方程式の自己適合移動格子スキームを開発し、それらの数値計算法としての有効性を確かめた。

自己適合移動格子スキームの鍵となるのは、ホドグラフ変換の離散化であるが、ホドグラフ変換は一種のオイラー･ラグランジュ変換であり、また保存則と密接に関連している。実は、格子間隔の発展方程式は離散保存則の形をしており、格子間隔は保存密度となっている。この保存則により格子間隔が場の変化に合わせて自動的に調節されていくのである。

さらに、代表者は、九州大梶原氏、山形大井ノ口氏らの離散微分幾何のグループと議論し、自己適合移動格子スキームが離散微分幾何学と密接に関連し、離散微分幾何学を用いることによって自己適合移動格子スキームが自然に導出できることを発見した。

２．研究の目的

本研究課題は、代表者らが提案した「自己適合移動格子スキーム」をより広いクラスの非線形偏微分方程式に適用可能にし、それらを数値計算法として応用し、数値計算法としての性能を確かめ、さらに修正、改良することにより効率の良い数値計算法を開発することを目的とする。また、自己適合移動格子スキームにおいては離散化された保存則、離散ホドグラフ変換、離散微分幾何学が重要な鍵となることが我々のこれまでの研究で明らかになっているが、それをさらに追求して、自己適合移動格子スキームの適用範囲を広げることが目標である。

３．研究の方法

可積分系、ソリトン、非線形波動、離散微分幾何学分野で培われてきた理論的手法を用いて偏微分方程式の新しい数値計算法を開発していくと同時に、具体的な数値計算を実施して理論の有効性を確認していく。

４．研究成果

大振幅非線形波動を記述する偏微分方程式の解の構造を保存する差分スキームの構築法の確立とその数値計算法への応用に向けて、これまで離散化に成功していなかったタイプの非線形波動方程式（多成分系、３次元渦糸問題、水面波の数理モデル、水の土壌への浸透を記述する数理モデルなど）の解の構造を保存する離散化を行い、様々な方程式に対して自己適合移動格子スキームを構築することに成功した。さらに、それらを用いた数値計算の精度の検証を行い、自己適合移動格子スキームの有効性を示した。また、自己適合移動格子スキームと離散微分幾何学との関係についても詳しく調べた。

１年目に得られた研究成果は以下の通りである。結合型短パルス方程式、結合型矢嶋-及川方程式(多成分長波-短波共鳴相互作用方程式)の可積分性を保存する離散化を試み成功した。結合型短パルス方程式の厳密解はパフィアンで書けるが、離散化によってもパフィアン解が保たれる差分スキームであり、格子点が波形に合わせて動く自己適合移動格子スキームを構築できた。結合型矢嶋-及川方程式については格子点は動かないタイプの差分スキームが得られこの差分スキームがパフィアン型の解を持つことを示した。これらの差分スキームを用いて数値計算を行うと従来の数値計算法ではうまくできなかった計算が行えることがわかった。これらの研究結果により我々が提案している構造保存型離散化の方法の適用範囲がさらに広がった。また、３次元問題に対する自己適合移動格子スキーム構築法の探索のため、例として渦糸方程式の自己適合移動格子スキーム構築に挑み成功した。３次元空間での曲線の運動に関連するソリトン方程式の自己適合移動格子スキームは複素関数を導入して空間１次元のソリトン方程式で表示し離散化

することで構築できることがわかった。この例により３次元曲線問題に関しての自己適合移動格子スキームの構成法について理解が進んだ。

２年目に得られた研究成果は以下の通りである。2 成分 reduced Ostrovsky 方程式の可積分性を保存する離散化を試み、自己適合移動格子スキームの構築に成功した。２成分 reduced Ostrovsky 方程式の厳密解はパフィアンで書けるが、この解の構造を保存した離散化に成功し、得られた離散化は自己適合移動格子スキームとなることがわかった。第二に、修正短パルス方程式の可積分性を保存する離散化を試み、自己適合移動格子スキームの構築に成功した。修正短パルス方程式はカスプ型ソリトン解を持つが、これまでカスプ型 ソ リトン解のシミュレーションは困難であった。修正短パルス方程式の自己適合移動格子スキームによってカスプ型ソリトン相互作用の数値計算を精度良く行えることがわかった。これらの研究結果により我々が提案している構造保存型離散化の方法の適用範囲がさらに広がった。また、自己適合移動格子スキームの幾何学的側面を理解するための試みとして、defocusing の場合の複素短パルス方程式の幾何学的構造を調べた。これを元 defocusing 複素短パルス方程式の自己適合移動格子スキームの幾何学的構成のための準備が整った。

前年までの研究成果をさらに発展させるために、３年目は以下の３つを目標にして研究を行なった:(1) 自己適合移動格子スキームの応用範囲を広げること 、(2)自己適合移動格子スキームが有効な数値計算法であることを示すための計算精度の検証を行うこと、(3)現実問題に関わる数理モデルに対する自己適合移動格子スキームを用いた数値計算を行うこと。(1)については、非線形波動現象を記述する様々な非線形偏微分方程式の解の構造を保存する差分スキームの構築法の確立とその数値計算法への応用に向けて、これまで離散化に成功していなかったタイプのソリトン方程式の解の構造を保存する離散化(自己適合移動格子スキームの構築)を行なった。水面波を記述する数理モデルとしてよく知られる Degasperis-Procesi 方程式の可積分性を保存する離散化を試み、自己適合移動格子スキームの構築に成功した。Degasperis-Procesi 方程式の厳密解はパフィアンを用いて書けるが、この解の構造を保存した離散化に成功し、得られた離散化は自己適合移動格子スキームとなることがわかった。(2)については，自己適合移動格子スキームを数値計算法として用いる際に計算精度はどれくらいになるのかを検 証 す る ため、修正短パルス方程式の自己適合移動格子スキームを用いた数値計算の精度について詳細に調べた。(3)については自己適合移動格子スキームの現実問題への応用として、水の土壌への浸透を記述する数理モデルについて自己適合移動格子スキームを構築し、それを用いた数値計算の精度を検証した。これらの研究結果から自己適合移動格子スキームが効果的な数値計算法であることがわかった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　８件）

① Dimetre Triadis, Philip Broadbridge, Kenji Kajiwara, Ken-ichi Maruno, Integrable Discrete Model for One-Dimensional Soil Water Infiltration, Studies in Applied Mathematics, 査読有, 140 巻, 2018, 483-507

② Bao-Feng Feng, Ken-ichi Maruno, Yasuhiro Ohta, An integrable semi-discrete Degasperis-Procesi equation, Nonlinearity, 査読有, 30 巻, 2017, 2246-2267

③ Bao-Feng Feng, Ken-ichi Maruno, Yasuhiro Ohta, A two-component generalization of the reduced Ostrovsky equation and its integrable semi-discrete analogue, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical , 査読有, 50 巻, 2017, 55201 :1-15

④ Bao-Feng Feng, Ken-ichi Maruno, Yasuhiro Ohta, Geometric Formulation and Multi-dark Soliton Solution to the Defocusing Complex Short Pulse Equation, Studies in Applied Mathematics, 査読有, 136 巻, 2017, 343-367

⑤ 徐俊庭, 丸野健一, Bao-Feng Feng, 太田泰広, Modified Short Pulse 方程式の自己適合移動格子スキーム, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 2034 巻, 2017, 150-165

⑥ Junchao Chen, Yong Chen, Bao-Feng Feng, Ken-ichi Maruno, Yasuhiro Ohta, An integrable semi-discretization of the coupled Yajima-Oikawa system, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, 49 巻, 2016, 135203:1-19

⑦ 丸野健一, 畑絢佳, 3 次元問題における自己適合移動格子スキームの構築法, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1989 巻, 2016, 104-112

⑧ Bao-Feng Feng, Ken-ichi Maruno, Yasuhiro Ohta, Integrable semi-discretization of a multi-component short pulse equation, Journal of Mathematical Physics, 査読有, 56 巻, 2015, 043502:1-15

〔学会発表〕（計　　８件）

① 丸野健一, 可積分系と数値計算:厳密解 vs. 数値解, 研究集会「可積分系の数理と応用」, 京都大学数理解析研究所, ２０１７年９月

② 丸野健一, Integrable self-adaptive moving mesh schemes for nonlinear waves, 日本応用数理学会２０１６年度年会, 北九州国際会議場, ２０１６年９月

③ 丸野健一, Self-adaptive moving mesh schemes arising from integrable systems, The 3rd China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, 西安, 中国, ２０１６年８月

④ 丸野健一, Self-adaptive moving mesh schemesfor Camassa-Holm type equations , Mini-Workshop on Nonlinear Waves in Fluids, 京都大学数理解析研究所, ２

０１６年５月

⑤ 丸野健一，３次元問題における自己適合移動格子スキーム，研究集会「可積分系が拓く現象数理モデル」，明治大学先端数理科学インスティチュート，２０１５年１１月

⑥ 丸野健一，３次元空間における自己適合移動格子スキームの構築法，研究集会「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」，京都大学数理解析研究所，２０１５年１０月

⑦ 丸野健一，渦糸方程式の自己適合移動格子スキーム，流体力学会年会２０１５，東京工業大学，２０１５年９月

⑧ 丸野健一， A self-adaptive moving mesh scheme in 3-dimensional space, The International Congress on Industrial and Applied Mathematics 2015 , 北京，中国，２０１５年８月

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
丸野　健一　（MARUNO, Kenichi）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：80380674

(2)研究分担者
太田　泰広　（OHTA Yasuhiro）
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号： 10213745

高橋　大輔　（TAKAHASHI, Daisuke）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：50188025

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者
(　　　)