様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　５ 月 ２１ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４９１３

研究課題名（和文）リー理論を用いた複素解析幾何の新展開

研究課題名（英文）A new development of complex analytic geometry by using Lie theory

研究代表者
清水　悟（Shimizu, Satoru）

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：９０１７８９７１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究においては、リー理論を用いた複素領域の研究を通じて、チューブ領域と呼ばれる複素有界領域についての興味深い結果を得た。具体的には、ある一般的設定の下に、チューブ領域の正則自己同型群が可解という基本的性質をもつ場合にその群の構造を明らかにした。また可解な正則自己同型群をもつチューブ領域の具体例はよく知られていなかったが、高校生の知識でも理解可能な初等的な例で重要な意義をもつものを見つけることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
数学においては、応用例のない定理や一般論はつまらない、と言われることがある。また数学は高度に抽象的な学問であることから、意義ある具体例というものは重要な意味をもつ。そのようなことから、本研究およびそれに連なる研究において、一般的な理論を構築するのみならず、その応用として意義ある具体例を与えることが出来たことは、学術的意義のあることと考えられる。またその具体例は一般的理論の構築なしでは得ることは出来なかったであろうことにも注意したい。

研究成果の概要（英文）：In the present research, through the study of complex domains by using Lie theory, we obtained an interesting result on complex bounded domains called tube domains. To be concrete, under some general setting, when the holomorphic automorphism group of a tube domain is solvable, we clarified the structure of the group. Also, concrete examples of tube domains that have solvable holomorphic automorphism groups were not known well, but we could find an elementary example which can be understood even by high school student knowledge and has much importance.

研究分野：多変数複素解析学

キーワード：リー理論　複素解析幾何　CR幾何　無限小CR自己同型　チューブ領域　ラインハルト領域　正則自己同型　正則同値問題

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) 研究代表者は従来からリー群の理論を用いた多変数複素解析学、複素幾何学の研究を行っている。今回の研究課題「リー理論を用いた複素解析幾何の新展開」は、その一環として、研究代表者がこれまでに採択された科学研究費研究課題「複素多様体の上への群作用の研究」、「特殊領域の研究」、「正則自己同型群の研究とその複素解析学への応用」と次のように関連している。

(2) 「複素多様体の上への群作用の研究」においては、特にトーラス作用の研究に集中した。その結果、長年懸案の問題であった非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の解決に、部分的ではあるが本質的な進展を見た。そしてこの解決結果より非有界なラインハルト領域の上へのトーラス作用の標準化についての基本的な結果を得た。これらの結果を基にして、非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的解決およびトーラス作用の共役性の複素幾何学への応用の準備を整えることができた。非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的解決は、「特殊領域の研究」、「正則自己同型群の研究とその複素解析学への応用」、そして今回の「リー理論を用いた複素解析幾何の新展開」を通じての主要なテーマの一つとなっている。またトーラス作用の共役性の複素幾何学への応用は、上記「特殊領域の研究」における研究連絡の際に着想を得た課題で、今回の研究課題における１次元トーラス作用をもつ２次元複素有界領域の研究に繋がるものである。

(3) 「特殊領域の研究」においては、特にチューブ領域の研究に進展を見ている。とりわけチューブ領域上の完備多項式ベクトル場の延長に関する結果をある程度確立した意義は大きい。このことより、これまで手が付かなかった多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域の一般的研究が可能になり、そのための有用な方法も開発できた。今回の研究課題においても重点的にチューブ領域の研究を取り上げるのは、そのようなことを踏まえて、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域に関する正則同値問題の解決等が強く期待できるからであり、また完備多項式ベクトル場の延長に関する結果の完成が望まれるからである。

(4) 「正則自己同型群の研究とその複素解析学への応用」においては、非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題についてさらなる研究を進め、「複素多様体の上への群作用の研究」において得た結果と対極的であるが、ある意味で対をなす基本的結果を得ることができた。これにより非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的解決が十分可能となった。

２．研究の目的

(1) リー理論を用いた複素解析幾何の局所的理論、大域的理論の研究を行う。局所的理論については、CR 幾何における無限小 CR 自己同型、CR 同値問題などを中心に調べ、大域的理論については、複素領域の幾何における無限小正則自己同型、正則同値問題などを中心に調べる。そして局所的理論と大域的理論の対応関係について考察する。

(2) 複素領域の幾何の研究：これまで継続的に行ってきたチューブ領域、ラインハルト領域等の研究を、リー理論の応用に重点を置き、以下の項目に沿って引き続き進める。

① チューブ領域の研究：チューブ領域は、その底の凸包が直線を含まないとき、複素有界領域に双正則同値になる。そのようなチューブ領域の無限小正則自己同型環の構造については、研究代表者による一般的な結果がある（小林昭七教授還暦記念論文集、World Scientific、1994）。その見地からすると、チューブ領域の正則自己同型の研究においては、無限小正則自己同型環が完備多項式ベクトル場からなるようなチューブ領域が重要な研究対象になる。この種のチューブ領域を多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域と呼ぶことにする。本研究においてはチューブ領域上の完備多項式ベクトル場に関するある種の決定アルゴリズム、いわゆる延長（prolongation）と呼ばれる方法、を研究代表者によるこれまでの成果（Tohoku Math. J.、2013）を踏まえて発展させたい。そしてそれを、完備多項式ベクトル場の"完備性"の直接的利用と併せて利用し、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域の正則自己同型や同値性の研究を図る。また CR 幾何の研究と関連して次のような考察を行う。多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域 $D$ に対して、その境界のある開部分集合 $M$ が CR 幾何における然るべき条件を満たすとする。このとき $D$ の無限小正則自己同型は、完備多項式ベクトル場であることから、$M$ の点 $p$ の近傍における $M$ の無限小 CR 自己同型 $\mathrm{hol}(M,p)$ の元を自然に誘導する。この対応は、$D$ の無限小正則自己同型環 $\mathfrak{g}$ から $\mathrm{hol}(M,p)$ の中へのリー環としての同型写像を与えるので、$\mathfrak{g}$ は $\mathrm{hol}(M,p)$ のリー部分環とみなすことができる。この事実に基づき、$\mathfrak{g}$ の構造と $\mathrm{hol}(M,p)$ の構造との関係を調べてみたい。

② ラインハルト領域の研究：非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題に取り組む。具体的には問題の対象として擬凸な非有界ラインハルト領域でその対数像が直線を含むようなものを扱う。そのような領域 $D$ が座標超平面を含まない場合、またそれとは対極的な、$D$ がすべての座標超平面を含む場合には、研究代表者により正則同値問題へ肯定的解答が与えられている。この結果を基にして、一般の場合、つまり $D$ が一部の座標超平面と交わる場合に正則同値問題へ解答を与えることを試みる。またリー理論を複素解析幾何に応用する際には、群作用の共役性が一つの鍵となる。非有界ラインハルト領域上へのトーラス作用の共役性は非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の研究と密接に関連するので、正則同値問題の研究と併せてトーラス作用の研究も進めたい。

③ １次元トーラス作用をもつ２次元複素領域の研究：トーラス作用の研究の一環として、２次

元有界擬円状領域、2 次元有界ハルトーグス領域等の 1 次元トーラス作用をもつ 2 次元複素有界領域の研究を行う。特にそれらの正則自己同型群を調べる。また一般に 1 次元トーラス作用をもつ 2 次元複素領域が擬円状領域として実現できるかということについても調べたい。

３．研究の方法

(1) チューブ領域、ラインハルト領域に関する正則同値問題へ、段階を踏んで、解答を与えることを試みる。そして研究成果を学内、学外のセミナーあるいは研究集会において発表する。ラインハルト領域に関しては、研究結果の集積が理論と呼べるものになりつつあることから、それらを体系的にまとめるため、資料収集、関連分野の研究者との研究討論に努める。

(2) チューブ領域に対しては、先ずその上の完備多項式ベクトル場の延長についての研究に取り組みたい。また、一般に複素有界領域に関する正則同値問題への、リー群論における共役性定理を利用してのアプローチにおいては、対象となる複素有界領域の正則自己同型群の、ある種の可解なリー部分群に着目することが多い。多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域$T_\Omega$を対象とするときも、先ずどのような共役性定理を利用するかを見定め、そして$T_\Omega$上の完備な正則ベクトル場のなすリー環$\mathfrak{g}(T_\Omega)$の可解なリー部分環で然るべき性質をもつものに着目することになる。このような考察において一つの典型的な場合であると同時に基本的な意義をもつ、$\mathfrak{g}(T_\Omega)$自身が可解な場合の考察から取り組みたい。その際の主な研究方法としては、チューブ領域のもつ代数的構造を明瞭にするという形での座標変換の利用、$\mathfrak{g}(T_\Omega)$の等方部分環の随伴表現に関する固有空間分解、そして完備多項式ベクトル場の"完備性"の直接的利用などがある。また可解なリー群、リー環に関する幾何学的な理論である、微分幾何学における solvmanifold の理論の検討も研究方法についての大きな参考になろう。

(3) 非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題については、数学的妥当性および技術的な観点から、対象を擬凸な非有界ラインハルト領域でその対数像が直線を含むようなものに絞りたい。そのような領域$D$が座標超平面を含まない場合、またそれとは対極的な、$D$がすべての座標超平面を含む場合には､研究代表者により正則同値問題へ肯定的解答が与えられている。この結果を基にして、ラインハルト領域の分類を試みる。特に、2 次元のラインハルト領域の分類を基に、3 次元のラインハルト領域の分類を試み、一般次元のラインハルト領域の分類に対する手がかりを探りたい。

(4) 1 次元トーラス作用をもつ 2 次元複素領域の研究については、以前行った 2 次元有界ハルトーグス領域の正則自己同型群に関する研究を発展させることから始めたい。

４．研究成果

(1) これまで研究代表者が行って来た研究で得られた、チューブ領域上の完備多項式ベクトル場に関する延長定理を利用して、可解な自己同型群をもつある種のチューブ領域の構造と同値性を調べた。具体的には、D を複素 n 次元数空間内の多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域とし、その底は直線を含まない凸領域であるとする。このとき、D の正則自己同型群 G が可解で、D のある点を通る G の軌道の次元が n + 1 である場合に、D の無限小正則自己同型環の構造を明らかにすると同時に正則同値問題に肯定的解答を与えた。

(2) 多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域 D の間で、第 1 種ジーゲル領域、すなわち底が凸錐体であるチューブ領域はつぎの点で特徴的である：D が第 1 種ジーゲル領域のとき、D の正則自己同型群 G が可解であるならば、G の単位成分は必ずアフィン自己同型のみから成る。上記(1)の結果の具体例として、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域 D の底が凸錐体ではない場合に、D の正則自己同型群が非アフィン自己同型を含み可解となるような D の例を与えた。

(3) これまで研究代表者が行って来た研究で得られた、チューブ領域上の完備多項式ベクトル場に関する延長定理を利用して、可解な自己同型群をもつある種のチューブ領域に対して、その無限小正則自己同型環の構造を調べた。具体的には、D を複素 n 次元数空間内の多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域とし、その底は直線を含まない凸領域であるとする。そして D の正則自己同型群 G は可解である仮定する。このとき G のリー環に属する 2 次の多項式ベクトル場に対して、実線形座標変換を利用し、その標準形を与えた。

(4) 上記(3)の結果を基にして、G のリー環の巾零根基に属する多項式ベクトル場の次数が必ず 1 以下であることを示した。このことから、D が可解な自己同型群 G をもつときには、G のリー環に属する任意の多項式ベクトル場は次数が 2 以下であるということが分かった。

(5) 上記(3)の結果を利用して、D が可解な自己同型群 G をもつとき、G のリー環の一般的構造を調べた。そして G のリー環の直和分解における、本質的な意味で次数が 2 であるような多項式ベクトル場のなす部分空間について、その標準的な基底を与えた。

(6) 可解な自己同型群をもつチューブ領域に関する正則同値問題について研究を進めた。具体的には、D を複素 n 次元数空間内の多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域とし、その底は直線を含まない凸領域であるとする。そして D の正則自己同型群 G は可解である仮定する。このとき、G のリー環の、実平行移動の群に対応する部分環の共役性について、新たな知見を得た。

(7) 複素有界領域の幾何において、ある大域的特性をもつ領域を局所的に特徴付けることは興味ある課題である。これに関連して、等質有界領域の準局所的特徴付けを与えた。そして応用として、対称領域の特徴付けやある種の非対称等質有界領域の特徴付けに関する結果を得た。

(8) 金沢大学名誉教授の児玉秋雄氏と共同で、フォック・バーグマン・ハルトーグス領域に関する、内

容的には独立した２つの定理を得た。一方を定理１、もう一方を定理２とするとき、定理１では、２つの同次元フォック・バーグマン・ハルトーグス領域に対して、それらの間の固有正則写像がどういうものであるかを調べた。その際、ある場合については、「基本的事実」がすでに知られていた。従って、そのような場合以外について、どのようなことが生じるかを問うことになる。実際、定理１では同次元フォック・バーグマン・ハルトーグス領域間の固有正則写像全体のなす空間の構造を明らかにした。ところで、「基本的事実」は最初に Tu-Wang により証明され、その後、児玉氏が別証を与えた。それらの証明において、Tu-Wang は代数幾何学からの既知の結果を利用し、他方、児玉氏はリー群論における手法を用いた。いずれにせよ、両証明ともいささか長く込み入ったものである。このことを考慮し、定理１においては、「基本的事実」の新証明も与えた。また定理２においては、D、E を必ずしも同次元とは限らないフォック・バーグマン・ハルトーグス領域とするとき、D の正則自己同型群と E の正則自己同型群のデータを用いて、D と E の直積空間の正則自己同型群の構造を決定した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計３件）

①<u>清水 悟</u>、Holomorphic equivalence problem for Reinhardt domains and the conjugacy of torus actions、Tohoku Math. J.、査読有、68 巻、2016、273-291

②<u>清水 悟</u>、Structure and equivalence of a class of tube domains with solvable groups of automorphisms、J. Math. Soc. Japan、査読有、69 巻、2017、1157-1177
DOI:10.2969/jmsj/06931157

③<u>清水 悟</u>、児玉 秋雄、Two theorems on the Fock-Bargmann-Hartogs domains、Osaka J. Math.、査読有、56 巻、2019、未定

〔学会発表〕（計４件）

①<u>清水 悟</u>、可解な自己同型群をもつある種のチューブ領域の構造と同値性、日本数学会秋季総合分科会、2015 年 9 月 15 日、京都産業大学

②<u>清水 悟</u>、可解な自己同型群をもつチューブ領域、日本数学会秋季総合分科会、2017 年 9 月 12 日、山形大学

③<u>清水 悟</u>、可解な自己同型群をもつチューブ領域、多変数関数論冬セミナー、2017 年 12 月 22 日、東京理科大学 野田キャンパス

④<u>清水 悟</u>、等質有界領域の準局所的特徴付け、日本数学会秋季総合分科会、2018 年 9 月 25 日、岡山大学

６．研究組織