

令和元年6月24日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04921

研究課題名(和文) Banach環上のある種のスペクトル保存写像とその摂動の安定性

研究課題名(英文) Certain spectrum preserving maps on Banach algebras and the stability of their perturbations

研究代表者

三浦 毅 (MIURA, TAKESHI)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：90333989

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題において、可換Banach環上の乗法的スペクトル保存写像の構造を解明するとともに、関数空間上の全射等距離写像の構造を調べた。特に閉区間 $[0,1]$ 上の連続微分可能な複素数値関数全体 $C_1([0,1])$ に対しては、これまでに複素線形性を仮定した上で、全射等距離写像が特徴付けられ、 $C_1([0,1])$ のノルムごとに個別の証明が与えられていた。本研究課題においては、これまで独立に扱われていた手法を統一的に証明する方法を発見し、さらに複素線形性を仮定せずに全射等距離写像を決定することを可能とした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

乗法的スペクトル保存写像の研究は2000年頃に始まり、この10年の間に世界的な競争が生まれ活発な研究がなされた。本研究では特に可換Banach環において、世界をリードする研究成果をあげることに成功した。また、スペクトル保存写像に関連して、保存問題としての等距離写像の研究を始めた。等距離写像は少なくとも1932年には研究がなされ現在も継続する分野である。しかし線形とは限らない等距離写像はほとんど研究されていないようである。古典的問題でありながら、世界の先端をゆく研究が本研究において始められた。

研究成果の概要(英文)：In this research subject, the structure of, what is so called, multiplicatively spectrum preserving maps between commutative Banach algebras was investigated, and the structure of surjective isometries between function spaces was characterized. For the complex linear space $C[0,1]$ of all continuously differentiable complex valued functions on the closed unit interval $[0,1]$, we have characterized surjective, not necessarily linear, isometries on $C[0,1]$ with respect to some norms; the space $C_1([0,1])$ has many norms, and the proof of the characterization of isometries were given to each norm. In our argument, we introduce a notion to unify these norms, and give a unified proof to characterize surjective isometries on $C_1([0,1])$.

研究分野：函数解析学

キーワード：等距離写像 端点 Choquet境界 関数環 可換Banach環 極大イデアル空間

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

線形とも連続とも限らない写像の構造の研究は、Molnar の結果により世界的な注目を集めていた。特に、積のスペクトルを保存する写像の構造が様々な Banach 環に対して研究されていた。そこで、より一般の Banach 環に対する情報的スペクトル保存写像の構造を解明したい、という欲求が自然と湧いてくる。さらに、席のスペクトルに対応して和のスペクトル保存写像を考えることは極めて自然であり、このことから等距離写像との関連がうかがえる。

2. 研究の目的

$C(X)$ によりコンパクト Hausdorff 空間上の複素数値連続関数全体を表す。 $C(X)$ は各点での演算と最大値ノルムによって可換 Banach 環となる。 X 上の関数 f のスペクトルを $\sigma(f)$ で表す。関数 f のスペクトルは f の値域 $f(X)$ と同じであることが知られている。Molnar は次の意味でスペクトルを保存する全射 $S: C(X) \rightarrow C(X)$ の構造を調べた。

$$(S(f)S(g)) = (fg) \quad (f, g \in C(X)) \quad \text{or} \quad (S(f)S(g)^*) = (fg^*) \quad (f, g \in C(X))$$

ただし h^* は、関数 h の複素共役である。注目すべき点は、 S は上の意味でスペクトルを保存するが、線形とも連続とも限らないことである。これまでの函数解析学の研究では、主に線形写像が扱われてきたが、Molnar の結果以降は、線形とは限らないがある種の構造を保つ写像が研究されるようになった。本研究においては、Molnar の定理に現れる 2 種類の仮定条件を統一的に扱い、より一般の条件のもとで、さらに $C(X)$ とは限らない可換 Banach 環に対しても類似の結果を得ることを目的とする。特に、写像 S の形を決定する情報がスペクトルのどこに隠されているのかを探ることも重要な問題である。実際、ある種の Banach 環に対しては、写像の構造はスペクトルの最遠点に含まれていることが Luttman and Tonev により示されている。したがって、類似の結果が一般の可換 Banach 環に対しても成り立つことが期待される。

また、積のスペクトルかわりに「和のスペクトル」を考察することは自然な問題である。このとき、さらに差のスペクトルを保存する写像、つまり $(S(f) - S(g)) = (f - g)$ を満たす S を考えれば、この問題が必然的に「等距離写像」と密接に関連していることが分かる。これまで等距離写像に関する多くの研究成果が得られているが、それらの多くは線形性を仮定した上で構造を解明するものであった。Molnar 以降の研究では、線形性は他の条件から自然に導かれ得ることが知られているため、本研究においても「線形とは限らない等距離写像」の構造を解明することを研究目的とする。

3. 研究の方法

Molnar の導入した乗法的スペクトル条件

$$(S(f)S(g)) = (fg) \quad (f, g \in C(X)) \quad \text{or} \quad (S(f)S(g)^*) = (fg^*) \quad (f, g \in C(X))$$

を一般の可換 Banach 環に対して、しかも統一的に考察するためには、一つの写像 S の構造を調べるのではなく、写像の組み (S, T) の構造を調べる必要がある。さらにスペクトル全体ではなく、適切な部分集合を考えることにより、スペクトルのどこに写像の構造を決定する情報が含まれているのかを調べる。スペクトルの最遠点までの距離がスペクトル半径であることから、スペクトル保存写像とある種の等距離写像が密接に関連していることが期待される。そこで線形とは限らない等距離写像の構造を解明することにより、古典的理論である等距離写像を現代的視点である保存問題として再構築する。

4. 研究成果

(1) $C^1([0, 1])$ やある種の正則関数のなす Banach 空間、ベクトル値の Lipschitz 関数空間上の全射等距離写像の構造を、いくつかのノルムに対して、線形性を仮定せずに解明した。具体的には、 $C^1([0, 1])$ 上の全射等距離写像の構造定理は、Cambren (1965), Rao and Roy (1971), Koshimizu (2011)の結果を拡張し、統一的手法による証明を与えることに成功した。複素平面の単位開円板嬢の正則関数で、その導関数がある界であるもののクラスを S で表す。 S のノルムを、導関数の最大値ノルムからを用いて定義し、このノルムに関する全射等距離写像の表現を与えた。この定理は、Novinger and Oberlin (1985)の結果では解明されていない $p = \infty$ の場合を解決する者である。Lipschitz 空間上の等距離写像に関しては、端点を用いた手法ではなく、Lumer's method と呼ばれる方法を用いることにより、 $C(X)$ に値をとる Lipschitz 空間の間の全射複素線形等距離写像の形を、最大値ノルムと Lipschitz 定数との和で与えられるノルムに関して決定した。

(2) 乗法的スペクトル保存写像の構造を、Banach 環全体とは限らない積で閉じた集合に対して解明した。これまでにいくつかのスペクトル条件に対するスペクトル保存写像が考察されてきた。本研究では、それらのスペクトル条件に対して、可換 Banach 環や関数環の部分集合を考えスペクトルを保存する写像の組みの構造を解明することにより、既存の結果を拡張し統一的に記述することを可能とした。特に、Molnar の定理では個別の証明が与えられていたスペクトル保存写像の結果は、複素共役に限らず写像の組みがスペクトルを保存する、と考えることにより同じ枠組みで考察することができるようになった。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 22 件)

Takeshi Miura and Norio Niwa, Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc, *Nihonkai Math. J.* 29 (2018), 51--65.

Kazuhiro Kawamura, Hironao Koshimizu and Takeshi Miura, Norms on $C^1([0,1])$ and their isometries, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 84 (2018), 239--261.

Osamu Hatori, Hermitian operators and isometries on Banach algebras of continuous maps with values in unital commutative C^* -algebras. *J. Funct. Spaces* 2018, Art. ID 8085304, 14 pp.

Osamu Hatori and Shiho Oi, Isometries on Banach algebras of vector-valued maps. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 84 (2018), no. 1-2, 151--183.

Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi, Peculiar homomorphisms between algebras of vector-valued maps. *Studia Math.* 242 (2018), no. 2, 141--163.

Takeshi Miura and Hiroyuki Takagi, Surjective isometries on the Banach space of continuously differentiable functions, *Contemp. Math.* 687 (2017), 181--192.

Sin-Ei Takahasi, Hiroyuki Takagi, Takeshi Miura and Hirokazu Oka, Semigroup operations distributed by the ordinary multiplication or addition on the real numbers, *Publ. Math. Debrecen*, 91 (2017), 297--307.

Kazuhiro Kawamura and Takeshi Miura, Real-linear surjective isometries between function spaces, *Topology Appl.*, 226 (2017), 66--85.

Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi, Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued continuously differentiable maps. *Linear Nonlinear Anal.* 3 (2017), no. 1, 101--109.

Osamu Hatori, Extension of isometries in generalized gyrovector spaces of the positive cones. *Problems and recent methods in operator theory*, *Contemp. Math.*, 687 (2017), 145--156.

11 Osamu Hatori, Commuting pairs of self-adjoint elements in C^* -algebras. *Math. Slovaca* 67 (2017), no. 1, 209--212.

12 Osamu Hatori and Shiho Oi, Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps. *J. Math. Anal. Appl.* 452 (2017), no. 1, 378--387.

13 Osamu Hatori and Lajos Molnar, Spectral conditions for Jordan $*$ -isomorphisms on operator algebras. *Studia Math.* 236 (2017), no. 2, 101--126.

14 Toshikazu Abe and Osamu Hatori, On a characterization of commutativity for C^* -algebras via gyrogroup operations. *Period. Math. Hungar.* 72 (2016), no. 2, 248--251.

15 Osamu Hatori and Lajos Molnar, Generalized isometries of the special unitary group. *Arch. Math. (Basel)* 106 (2016), no. 2, 155--163.

16 Takeshi Miura, Surjective isometries between function spaces, *Contemp. Math.*, 645 (2015), 231--239.

17 Takeshi Miura and Thomas Tonev, Mappings onto multiplicative subsets of function algebras and spectral properties of their products, *Ark. Math.* 53 (2015), 329--358.

18 Osamu Hatori, Maps on the sphere of the algebras of matrices. *Nihonkai Math. J.* 26 (2015), no. 2, 121--125.

19 Osamu Hatori, Commuting pairs of normal operators. Nihonkai Math. J. 26 (2015), no. 2, 85--90.

21 Toshikazu Abe and Osamu Hatori, Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem. Publ. Math. Debrecen 87 (2015), no. 3-4, 393--413.

22 Osamu Hatori, Isometries on the special unitary group. Function spaces in analysis, Contemp. Math., 645, 119-134.

〔学会発表〕(計 45 件)

1 川村 一宏, 古清水 大直, 三浦 毅, $C^1([0,1])$ 上の種々のノルムに関する等距離写像, 平成31年3月19日, 日本数学会(東京工業大学)

2 F.-Botelho, 三浦 毅, Generalized bi-circular idempotents on $C^1([0,1])$, 平成31年3月19日, 日本数学会(東京工業大学)

3 丹羽 典朗, 三浦 毅, 正則関数からなるBanach空間上の全射等距離写像について, 平成31年3月19日, 日本数学会(東京工業大学)

4 古清水 大直, 三浦 毅, 2-local isometries on C^1 , 平成30年12月2日, 関数環研究集会(金沢医科大学)

5 三浦 毅, 丹羽 典朗, Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc, 平成30年12月2日, 関数環研究集会(金沢医科大学)

6 羽鳥 理, 三浦 毅, Surjective isometries on a Lipschitz space of analytic functions on the open unit disc, 平成30年11月30日, 関数環研究集会(金沢医科大学)

7 三浦 毅, 関数空間上の全射等距離写像, 平成30年9月26日, 日本数学会(岡山大学), 特別講演

8 Takeshi Miura, Isometries on a Lipschitz space of analytic functions, 平成30年9月14日, Workshop on the Frontiers between Functional Analysis and Algebra (Universidad De Almeria)

9 Takeshi Miura, Isometries on a Lipschitz space of analytic functions, 平成30年9月7日, Seminar in Departamento de Analisis Matematico (Universidad de Granada)

10 Takeshi Miura, Isometries on C^1 space on $[0,1]$ with values in a uniform algebras, 平成30年5月9日, International Conference on Mathematics and Statistics (The University of Memphis)

11 高橋 眞映, 高木 啓行, 三浦 毅, 岡 裕和, 掛け算や足し算によって分配される実数上のある種の半群演算の決定, 平成30年3月19日, 日本数学会(東京大学)

12 Osamu Hatori, Surjective isometries on Banach algebras of Lipschitz maps, 平成30年3月19日, 日本数学会(東京大学)

13 三浦 毅, Isometries on uniform algebra valued C^1 -spaces, 平成30年2月15日, 等距離写像理論と保存問題の多様な視点からの研究(京都大学数理解析研究所)

14 Osamu Hatori, Isometries on admissible quadruples, 平成30年2月15日, 等距離写像理論と保存問題の多様な視点からの研究(京都大学数理解析研究所)

15 三浦 毅, 関数空間上の等距離写像の性質, 平成29年3月25日, 日本数学会(首都大学東京)

16 富樫 瑠美, 三浦 毅, 本間 大, 積とスペクトル半径を用いた単位的半単純可換Banach環の間に定義された実多元環として同形な写像の特徴づけについて, 平成29年3月25日, 日本数学会(首都大学東京)

17 高橋 眞映, 三浦 毅, 高木 啓行, 井上 純治, I型半単純可換Banach環の分類について,

平成29年3月25日，日本数学会（首都大学東京）

18 羽鳥 理，Hermitian operators on vector-valued Lipschitz algebras，平成29年3月25日，日本数学会（首都大学東京）

19 羽鳥 理，Commutativity via gyrogroup operations，平成29年3月25日，日本数学会（首都大学東京）

20 Takeshi Miura，Norms and isometries on $C^1([0,1])$ ，平成29年4月22日，Methods in Operator Theory and Applications (The University of Memphis)

21 Osamu Hatori，Lumer's method for certain admissible quadruples（招待講演），平成29年4月22日，Methods in Operator Theory and Applications (The University of Memphis)

22 Takeshi Miura，Norms on $C^1([0,1])$ and their surjective isometries，平成29年6月22日，Preservers Everywhere (Bolyai Institute, Szeged)

23 Osamu Hatori，Homomorphisms and isometries on Banach algebras of vector-valued maps（招待講演），平成29年6月21日，Preservers Everywhere (Bolyai Institute, Szeged)

24 Osamu Hatori，A geometric inequality on the poitive cone and an application，平成29年7月17日，Positivity IX (University of Alberta カナダ)

25 三浦 毅，高木 啓行， $C^1([0,1])$ 上の等距離写像，平成29年9月12日，日本数学会（山形大学）

26 Osamu Hatori，Peculiar homomorphisms on admissible quadruples，平成29年9月12日，日本数学会（山形大学）

27 Takeshi Miura，Isometries on C^1 -spaces of $C(X)$ -valued functions，平成29年10月20日，2017 Conference on Function Algebras (Nihon University)，

28 Osamu Hatori，On Example 8 of the paper of Jarosz and Pathak，平成29年10月21日，2017 Conference on Function Algebras (Nihon University)，

29 Osamu Hatori (Joint work with Shiho Oi) Isometries on algebras of Lipschitz functions with values in commutative C^* -algebras（招待講演），平成28年7月14日，20th conference of the international linear algebra society (KU Leuven, Auditorium Jean Monnet ベルギー)

30 Takeshi Miura，Surjective isometries on $C^1[0,1]$ with respect to several norms，平成28年10月31日，Researches on isometries from various viewpoints (RIMS Workshop, Kyoto University)

31 Sin-Ei Takahasi, Hiroyuki Takagi and Takeshi Miura，A Lau algebra of type I defined by semi simple commutative Banach algebras，平成28年11月1日，Researches on isometries from various viewpoints (RIMS Workshop, Kyoto University)

32 Osamu Hatori，Shiho Oi and Hiroyuki Takagi，Peculiar homomorphisms on commutative Banach algebras of vector-valued functions（招待講演），平成28年11月2日，Researches on isometries from various viewpoints (RIMS Workshop, Kyoto University)

33 Kazuhiro Kawamura, Hironao Koshimizu and Takeshi Miura，Surjective isometries on $C^1([0,1])$ with respect to a norm derived from plane figures，平成28年12月2日，関数環研究集会（茨城大学工学部）

34 Osamu Hatori，Commutativity of self-adjoint elements，平成28年12月3日，関数環研究集会（茨城大学工学部）

35 Toshikazu Abe and Osamu Hatori，Commutativity for C^* -algebras via gyrogroup operations，平成28年12月3日，関数環研究集会（茨城大学工学部）

- 36 三浦 毅, 関数環上のスペクトル保存写像の拡張, 平成27年3月23日, 日本数学会(明治大学)
- 37 阿部 敏一, 羽鳥 理, generalized gyrovector spaceについて, 平成27年3月22日, 日本数学会(明治大学)
- 38 阿部 敏一, 羽鳥 理, generalized gyrovector spaceに対するMazur-Ulamの定理とその応用, 平成27年3月22日, 日本数学会(明治大学)
- 39 羽鳥 理, Isometries on substructures of function algebras and operator algebras (特別講演), 平成27年9月15日, 日本数学会(京都産業大学)
- 40 Takeshi Miura, Surjective isometries on $C^1[0,1]$, 平成27年10月18日, Fall Southeastern Sectional Meeting (University of Memphis)
- 41 Osamu Hatori, An application of a Mazur Ulam theorem on generalized gyrovector spaces (招待講演), 平成27年10月18日, Fall Southeastern Sectional Meeting (University of Memphis)
- 42 羽鳥 理, Isometries on the substructures of unital C^* -algebras (招待講演), 平成27年10月26日, 作用素論・作用素環論研究集会(KKR妙高高原)
- 43 Osamu Hatori, Positive cones and GGV(招待講演)平成27年11月10日, Research on structure of operators by order and geometry with related topics (RIMS Conference)
- 44 川村 一宏, 三浦 毅, Banach-Stone型のいくつかの定理, 平成27年12月20日, 関数環研究集会(新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」)
- 45 羽鳥 理, 単位球面上の等距離写像に関する一つの注意, 平成27年12月20日, 関数環研究集会(新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名: 羽鳥 理

ローマ字氏名: (HATORI, osamu)

所属研究機関名: 新潟大学

部局名: 自然科学系

職名: 教授

研究者番号(8桁): 70156363

(2)研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。