

令和 3 年 5 月 14 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2020

課題番号：15K04922

研究課題名(和文) ラフパス理論とその確率偏微分方程式への応用

研究課題名(英文) Rough path theory and its applications to singular stochastic PDEs

研究代表者

稲浜 譲 (Inahama, Yuzuru)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：80431998

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：ラフパス理論と特異な確率偏微分方程式論の双方について、当初の計画どおりに順調に研究を進めた。ちなみに後者は歴史的に見ると、前者からの派生である。本研究の主力はラフパス理論とマリアバン解析の融合に注いだ。通常の伊藤流の確率微分方程式に関するマリアバン解析に関しては既に大量の結果があるが、それでも解かれず残っている重要問題もある。そのうち幾つかをラフパス理論を使って解けたことは幸運であった。一方、研究の表題にも入れた特異な確率偏微分方程式については、それまでに論文を書いたことはなかったが、研究期間中に二本論文を書くことができ、無事にこの話題に参入できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ラフパス理論とその派生である特異な確率偏微分方程式論は確率解析分野における新興勢力である。今までの標準的理論であった伊藤流の確率解析の議論とは全く違う発想に基づいていること、既に数々の強い結果が生まれたことから見て、これらの話題が現在の確率解析業界において最重要であることは疑いがない。しかし数学技術的に難しいこともあり、現在の日本ではこれらの新しい話題を研究している人は少ないのが現状である。このような状況の中で、本研究が着実に研究を進めたことは、確率論的な観点から見ると大きな意義があったと思う。

研究成果の概要(英文)：Following the initial research plan, I studied both rough path theory and singular stochastic PDEs. By the way, the latter theory is a ramification of the former. My main efforts was to unify rough path theory and Malliavin calculus. For usual SDEs in Ito's sense, there are already so many results on Malliavin calculus. However, it is also true that some important problem are still remain unsolved. It is fortunate for me that I was able to solve a few of them by using rough path theory. As for singular stochastic PDEs, I had written no paper on them at the beginning of this research project. But, I was able to write two paper during this project and successfully joined this research topic.

研究分野：確率論

キーワード：ラフパス理論 確率微分方程式 特異な確率偏微分方程式 マリアバン解析 大偏差原理 非整数ブラウン運動

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

題目に掲げた二つの理論についてそれぞれ書く。

- (1) ラフパス理論については、理論の骨格部分に関しては、当時既にほぼ完成の域に達しつつあった。基礎的な問題はほぼ解けてしまい、研究者それぞれが自分はこのからどの方向に向かうのかを決断しなければいけない状況だったと思う。筆者は基本的にはラフパス理論に残り、マリアバン解析と組み合わせて、技術的に高度な問題を解く方向を選んだ。
- (2) 特異な確率偏微分方程式論についてはまだ始まったばかりであったので、新しすぎて状況がそれほどはっきりしなかった。2014年のHairerのフィールズ賞受賞の興奮が冷めていなかった時期だったので何か大きなことが起きそうな予感はしていた。しかし筆者自身はこの非常に難解な分野について、それまで論文を書いたことがなかったので、とにかく何か論文を書いて、この重要な話題に遅れを取らずに参入せねばならないと思っていた。

2. 研究の目的

- (1) ラフパスに関して一言で説明すれば、ラフパス理論にマリアバン解析を合体させることが目的であった。広いが浅い結果よりも、たとえ興味を持つ人が少なくても、深い結果を証明できるように努力した。中でも一番価値が高いのは、通常の伊藤型の確率微分方程式に関する未知の結果を、ラフパスの理論の特徴を生かした方法により示すことであろう。また非整数ブラウン運動で駆動されるラフパスの意味での確率微分方程式は、マリアヴァン解析という強力な理論を適用すればまだまだ面白い結果が発見できると思う。
- (2) 特異な確率偏微分方程式論はあまりに技術的に難解なために、まずは論文を一本(以上)書いて、この話題に参入すると共に、この話題では数学的には何が起きているのかを把握することが当初の目的であった。数学的には定式化できていないが、物理的には重要とされる特異な確率偏微分方程式論はかなり存在するようなので、これらの模型が持つ物理的な性質をこの理論を使って数学的に証明できたら理想的であろう。

3. 研究の方法

通常の数学研究なので、淡々とごく普通のことを行っただけである。この分野の論文を読む、近隣分野の本も読む、毎日地道に計算練習をする。また研究会に出て、最新の情報を耳学問することも重要である。現代では文献の量が多すぎて、一人の研究者が読んで全部の内容を把握できる可能性はほとんどないからだ。研究会での自分自身の発表ももちろん重要である。聴衆からの反応が新たな気づきをもたらしてくれることもある。同分野の研究者との会話による交流は非常に重要である。新しい論文の「ネタ」が見つかるのは、往往にして同僚とのとりとめのない会話の中からだからである。

4. 研究成果

- (1) ラフパス理論とマリアバン解析と大偏差原理について。Freidlin-Wentzell型の大偏差原理というのは通常の確率微分方程式に対する小雑音極限と呼ばれる種類の問題に付随した非常に有名な大偏差原理だが、ラフパス理論経由の別証明が以前から知られている。しかし、この大偏差原理のピン留め拡散過程に対して成立するかどうかは基本的には未知であった。筆者はこれをラフパス理論と quasi-sure 解析(これはいわばマリアバン解析の中のポテンシャル論に相当する部分である)を組み合わせて証明した。これまでラフパス理論を通常の確率微分方程式に適用した場合は、有名な結果の別証明ばかりで、真に新しい結果が得られたという例は世界的にも事実上無かったと思うが、この仕事はある意味で第一号であると言える。もちろん証明中ではラフパス理論の長所やマリアバン解析の特徴が存分に発揮されている。
- (2) ラフパス理論とマリアバン解析と熱核の非対角の場合の漸近展開について。熱核は幾何学的、解析学的な観点からは非常に重要な研究対象である。ファインマン・カッツ公式により、熱核の確率論表示ができることにより、熱核の研究には実は確率微分方程式論が使えることは良く知られている。熱核の研究において短時間の漸近展開は伝統的な問題なのであるが、この仕事においては準楕円型の二階微分作用素に付随する熱核の非対角な場合の漸近展開を

ラフパスとマリアバン解析を組み合わせて研究した。この仕事の「売り」は多様体上の二点が遠く離れている場合、特に切断跡に入っている場合について、任意の次数までの展開を証明したことである。これは楕円型（すなわちリーマン多様体）の場合ですら新しい。証明はラフパス理論とマリアバン解析（特に渡辺流マリアバン解析における漸近展開理論）による。この結果は確率的に新しいというだけでなく、微分幾何学的にも長年の未解決問題を解いた新しい結果であり、専門外の人々にラフパスの威力を宣伝できたという意味でも価値は高いと思う。谷口説男氏（九州大）との共同研究である。

- (3) ラフパス理論とマリアバン解析と熱核の対角の場合の漸近展開について。この仕事では劣リーマン多様体上の自然な劣ラプラス作用素に対応した熱核の対角における短時間漸近展開を研究した。これから自動的に熱半群の跡が漸近展開されるが、この展開がスペクトル幾何学的に非常に重要である。ちなみに展開の初稿は五十年前に求まっていたが、それ以降はあまり進展がなかった。この結果が劣リーマン多様体に対するスペクトル幾何学に進展をもたらすことを願う。なお証明は主にマリアバン解析（特に渡辺流のマリアバン解析における漸近展開理論）による。谷口説男氏（九州大）との共同研究である。
- (4) ラフパスの意味での確率微分方程式をハースト指数が $1/4$ より大きい非整数ブラウン運動で駆動するモデルを調べた。係数ベクトル場がヘルマンダー条件を満たすときには、解の法則はルベグ測度に対して密度関数を持つことが知られている。この密度関数の短時間の非対角な場合の漸近展開をガウス・ラフパスに対するマリアバン解析を用いて示した。これは通常の確率微分方程式に対する Ben Arous の有名な結果のラフパス版だと思える。永沼伸顕氏（熊本大）との共同研究である。
- (5) 葉層空間上の確率微分方程式は既に存在しているが、多様体ではないために初期値に対する依存性は未知であった。その結果、付随する同相写像の流れの存在もまだ示せていなかった。この仕事ではラフパス理論の決定論的な性格を生かして、同相写像の流れの存在に厳密な証明を与えた。これは須崎清剛氏（熊本大）との共同研究である。
- (6) 3次元トーラス上の複素ギンズブルグ・ランダウ方程式に確率項として時空間白色雑音を付けた方程式を考える。この方程式は物理的には重要なのだが、雑音項の振る舞いが悪すぎるために、通常の数学では意味すらまだついていなかった。そこで二種類の特異な確率偏微分方程式論（正則性構造の理論とパラ被制御解析）のそれぞれを用いて、この方程式の時間局所解を求めた。計算量が膨大になり、とても長い論文になった。この論文が筆者にとり初めての特異な確率微分方程式に関する論文であり、その意味で筆者個人にとってはかなり意義のある仕事だと思っている。星野壮登氏（大阪大）と永沼伸顕氏（熊本大）との共同研究である。
- (7) 2次元トーラス上において、quasi-geostrophic 方程式と呼ばれる流体の方程式がある。最大の特徴は主要項がラプラス作用素ではなく、その分数冪であることである。このような分数冪ラプラス作用素を持つ特異な確率偏微分方程式はほとんど考えられていなかったので、quasi-geostrophic 方程式に時空間白色雑音を付けたモデルをパラ被制御解析を用いて時間局的に解いた。この理論ではよくあることだが、この場合も膨大な計算をする羽目になり、かなり長い論文になった。澤野嘉宏氏（中央大）との共同研究である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Yuzuru Inahama, Kiyotaka Suzuki	4. 巻 160
2. 論文標題 Stochastic flows and rough differential equations on foliated spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Bull. Sci. Math.	6. 最初と最後の頁 102852
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.bullsci.2020.102852	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuzuru Inahama	4. 巻 32
2. 論文標題 Rough path theory and stochastic calculus	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 113-136
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/suga/440	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuzuru Inahama, Setsuo Taniguchi	4. 巻 5
2. 論文標題 Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Forum Math. Sigma	6. 最初と最後の頁 74 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2017.14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Masato Hoshino, Yuzuru Inahama, Nobuaki Naganuma	4. 巻 22
2. 論文標題 Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Electron. J. Probab.	6. 最初と最後の頁 68 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/17-EJP125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuzuru Inahama	4. 巻 21
2. 論文標題 Short time kernel asymptotics for rough differential equation driven by fractional Brownian motion	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Electron. J. Probab.	6. 最初と最後の頁 29 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/16-EJP4144	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuzuru Inahama	4. 巻 20
2. 論文標題 Large deviations for rough path lifts of Watanabe's pullbacks of delta functions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not.	6. 最初と最後の頁 6378 - 6414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnv349	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuzuru Inahama	4. 巻 68
2. 論文標題 Short time kernel asymptotics for Young SDE by means of Watanabe distribution theory	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1-43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuzuru Inahama	4. 巻 367
2. 論文標題 Large deviation principle of Freidlin-Wentzell type for pinned diffusion processes	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 8107-8137
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/S0002-9947-2015-06290-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuzuru Inahama	4. 巻 67
2. 論文標題 Large deviation principle for certain spatially lifted Gaussian rough path	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Tohoku J. Math.	6. 最初と最後の頁 433-463
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 稲浜 謙	4. 巻 67
2. 論文標題 ラフパス理論と確率解析	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 291-314
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計26件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 21件)

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise
3. 学会等名 The International Workshop on Dynamics, Nonlinearity and Stochasticity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Stochastic flows and rough differential equations on foliated spaces
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 確率解析とその周辺
3. 学会等名 Stochastic flows and rough differential equations on foliated spaces
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Paracontrolled quasi-geostrophic equation with space-time white noise
3. 学会等名 非圧縮性粘性流体の数理解析 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Heat trace asymptotics for equiregular sub-Riemannian manifolds
3. 学会等名 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Heat trace asymptotics for equiregular sub-Riemannian manifolds
3. 学会等名 Theoretical and Applied Stochastic Analysis (18w5129) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Paracontrolled quasi-geostrophic equation with space-time white noise
3. 学会等名 17th International symposium on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Paracontrolled quasi-geostrophic equation with space-time white noise
3. 学会等名 確率解析とその周辺 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Paracontrolled quasi-geostrophic equation with space-time white noise
3. 学会等名 Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Stochastic flows and rough differential equations on foliated spaces
3. 学会等名 Stochastic Processes and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 稲浜譲
2. 発表標題 Heat trace asymptotics for equiregular sub-Riemannian manifolds
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise
3. 学会等名 16th International symposium on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Heat trace asymptotics for equiregular sub-Riemannian manifolds
3. 学会等名 確率論と幾何学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 稲浜 謙
2. 発表標題 Paracontrolled quasi-geostrophic equation with space-time white noise
3. 学会等名 Random matrices, determinantal processes and their related topics
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Rough path theory -- K. T. Chen meets K. Ito --
3. 学会等名 多重ゼータ値の諸相（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus
3. 学会等名 The Cut Locus -- A Bridge Over Differential Geometry Optimal Control and Transport--（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus
3. 学会等名 確率論と幾何学（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Gubinelli-Imkeller-Perkowski 理論による Φ^4_3 モデルへのアプローチの概説
3. 学会等名 確率解析とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Malliavin differentiability of solutions of rough differential equations
3. 学会等名 The 4th International Conference on Random Dynamical Systems and The 1st International Conference on Stochastic Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Large deviations for rough path lifts of Watanabe's pullbacks of delta functions
3. 学会等名 New Trends in Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 A brief introduction to rough path theory
3. 学会等名 Workshop on interaction between commutative and noncommutative probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 A gentle introduction to rough path theory
3. 学会等名 Summer school on Dirichlet forms and stochastic analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Large deviations for rough path lifts of Donsker-Watanabe's delta functions
3. 学会等名 Stochastic analysis and applications (German-Japanese bilateral research project 2015) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yuzuru Inahama
2. 発表標題 Large deviations for rough path lifts of Donsker-Watanabe's delta functions
3. 学会等名 確率解析とその周辺 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yuzuru INAHAMA's webpage
<https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~inahama/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 確率解析とその周辺	開催年 2015年～2015年
---------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------