様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １１ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４９３１

研究課題名（和文）サブラプラシアンに対する確率微分幾何学の体系的展開

研究課題名（英文）Systematic develpment of stochastic differential geometry associated with sub-Laplacians

研究代表者

谷口　説男（Setsuo, Taniguchi）

九州大学・基幹教育院・教授

研究者番号：７０１５５２０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：滑かな微分多様体上の退化した２階偏微分作用素で生成される拡散過程およびその滑らかな写像による像として得られる確率過程について，それらの経路の関数としての実現，ディリクレ問題，熱方程式の基本解への応用について調べた．とくに複素ユークリッド空間内の超平面を典型とするCR多様体，リーマン多様体の一般化である同等正則なサブリーマン多様体上に枠バンドル上の確率微分方程式を利用して拡散過程を構成し，それらを用いて熱方程式の基本解への確率解析的アプローチを行った．

研究成果の概要（英文）：As for diffusion processes generated by degenerate second order differential operators and their images through smooth mappings, their realizations as Wiener functionals and applications to Diriclet problems and heat kernels are investigated. In particular, on CR manifolds and equiregular sub-Riemann manifolds, diffusion processes are constructed with the help of stochastic differential equations on frame bundles over them. In addition, such diffusion processes are used in the stochastic analytical approach to heat kernels.

研究分野：確率解析

キーワード：サブラプラシアン　CR多様体　サブリーマン多様体　マリアバン解析　確率微分方程式

１．研究開始当初の背景

拡散過程の研究には，確率微分方程式を用いた「経路空間上の解析」を用いる確率論的な手法と偏微分方程式の基本解から出発する解析的な手法の二通りがある．これらは，伊藤の公式と呼ばれる確率微分方程式に対応する連鎖定理によって相互に関連している．この二つの手法は，多様体上の拡散過程の研究へと拡張され，確率微分幾何学という研究分野を生んだ．

K.D.Elworthy，P.Malliavin，J.M.Bismut，S.Watanabe らによる確率微分方程式に基づく確率微分幾何学の研究は，これまでのところ，非退化な作用素である Laplace-Bertrami 作用素，もしくは大域的な表示を持つ Hörmander 型の作用素を生成作用素に持つ場合に限られていた．退化した偏微分作用素であるサブラプラシアンに付随する拡散過程に関する解析的手法による研究は近年精力的に始められつつあったが，確率微分方程式に基づく体系的な「経路空間上の解析」としての隔離微分幾何学はまだ確立していない．

報告者は，サブラプラシアンの中でも複素解析学と関連して数多くの詳しい研究がなされている強擬凸 CR 多様体上のサブラプラシアン△(Kohn-Rossi ラプラシアンの実部）に対応する拡散過程を，局所座標を用いるテンソル解析的手法により，Wiener 汎関数として構成することに成功していた．実際，強擬凸 CR 多様体の CR 構造を定める正則バンドルに対応するユニタリ枠バンドル上の平行移動を，対応する Tanaka-Webster 接続を利用して実現し，水平基本ベクトル場$L_1,\cdots,L_n$が駆動する確率微分方程式

$$dr_t = 2Re\left(\sum_{\alpha=1}^{n} L_\alpha(r_t)\circ db_t^\alpha\right)$$

の解r_tの CR 多様体への射影として拡散過程を実現するという，Elles-Elworthy-Malliavin の手法を強擬凸 CR 多様体上で遂行することに成功した．ここで，b_tは n 次元複素ブラウン運動であり，確率積分は Stratonovich 積分である．このテンソル解析的手法を大域幾何学的手法へと転換することが最初の課題となっていた．

リーマン多様体の場合は Levi-Civita 接続に対応する直交枠バンドル上の確率微分方程式を用いて，リーマン多様体上の Laplace-Bertrami 作用素を生成作用素とする，点xから出発する拡散過程(リーマン多様体上のブラウン運動) $X(t,x)$とディラック測度の，S.Watanabe の意味での超関数と Wiener 汎関数の合成を利用して Laplace-Bertrami 作用素に付随する熱核を

$$p(t,x,y) = E\left[\delta_y(X(t,x))\right]$$

と表示できる．この確率的手法により Levi-Civita 接続から定まる幾何学的特性量を取り出すことができる．このような手法を強擬凸 CR 多様体上へと拡張することも期待できた．

２．研究の目的

サブラプラシアンに対する確率微分幾何学を，確率微分方程式によるランダムな力学系としての視点から，体系的に展開することを目的とした．先行研究を通じて得ていた強擬凸 CR 多様体上の Kohn-Rossi ラプラシアンの実部として実現されるサブラプラシアンによって生成される拡散過程（CR ブラウン運動）に Malliavin 解析を適応することにより，熱核の短時間漸近展開（対角線上，非対角線上）を示すことが目的であった．具体的には，次のような漸近挙動を示すことを目指した．

$$p(t,x,x) \sim t^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x)\, t^{k} \qquad (2)$$

$$p(t,x,y) \sim t^{-\beta} e^{-g(x,y)/t^{\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,(x,y) t^{k}$$

これらのパラメータβ，関数$C_k(x), g(x,y), C_k(x,y)$を定めることを目的とした．

３．研究の方法

当初は CR 多様体に特化した以下のような研究方法をとっていた．

1) 強擬凸CR多様体上のユニタリ枠バンドルの水平方向・水平持ち上げを，Tanaka-Webster 接続を用いて，局所座標によらず大域的な枠組で実現する．
2) 上の水平持ち上げを利用してユニタリ枠バンドル上に確率微分方程式を構成する．
3) Folland-Stein によるハイゼンベルグ群をモデルとする局所座標を利用して，上の確率微分方程式の解の射影が Malliavin 解析の意味で滑らかかつ非退化であることを証明する．
4) Folland-Stein の局所座標を利用して漸近挙動を確定する．

研究期間中に稲浜譲氏(九州大学)との共同研究を始め，それを通じ，より一般に

5) submersion の像として得られる確率過程に対し，リーマン多様体上の確率解析を再構築しながら漸近展開を行う，
6) サブリーマン多様体上の divergence-gradient 型サブラプラシアンが生成する拡散過程を，適切な直交枠バンドルを導入し，その上での確率微分方程式の解の射影として実現する Elles-Elworthy-Malliavin の手法の一般化を行う，

という研究方法も行った．

４．研究成果

① M を強擬凸 CR 多様体とする．すなわち，M は 2n+1 次元実多様体で，その CR 構造を決定する接バンドルの複素化 CTM の複素 n

次元部分バンドル$T_{0,1}$を持っている．この部分バンドルを枠とするユニタリ枠バンドル$U(T_{1,0})$を考える：

$$U(T_{1,0}) = \coprod_{x\in M}\left\{r: C^n \to (T_{1,0})_x: \text{等距離写像}\right\}$$

強擬凸性を定める Levi 形式を保つ一意的な接続である Tanaka-Webster 接続を用いて，このユニタリ枠バンドルに大域的な水平方向が定義でき，水平持ち上げが定まる．これらを用いて水平基本ベクトル場$L_1, \cdots, L_n$を定義できた．このとき，前述の確率微分方程式の初期条件 $r_0=r$ をみたす解 $r(t,r)$から，CR 多様体上のサブラプラシアン△（Kohn-Rossi ラプラシアンの実部）を生成作用素とする拡散過程が $X(t,x)= \boldsymbol{\pi}(r(t,r))$として実現できる．ただし，π は$U(T_{1,0})$から M への射影であり，$x \in M$に対し，$r$ を $\boldsymbol{\pi}(r)=x$ ととる．Folland-Stein によるハイゼンベルグ群をモデルとする局所座標によるサブラプラシアンの表示を利用して，この $X(t,x)$は Malliavin 解析の意味で滑らかであり，さらに非退化となっていることを証明した．これによりリーマン多様体の場合と同様に熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$$

の基本解(熱核)の期待値表現

$$p(t,x,y) = E\left[\delta_y(X(t,x))\right]$$

が成立することを導いた．さらに

(a) サブラプラシアンのハイゼンベルグ群をモデルとする局所座標表示と Malliavin 解析を用いた偏準楕円性に関する結果[1]を利用して，1-微分形式ωの確率線積分$\int_{X[0,t]}\omega$の分布が滑らかな密度関数を持つための十分条件を見出した．

(b) サブラプラシアンに対する滑らかな境界を持つ領域 D での Dirichlet 問題

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{\partial D} = f$$

の解が期待値表現を持つことを，Stroock-Varadhan の結果[2]と境界の滑らかさに関する[3]での結果を利用して証明した．

これらの結果は，後述〔雑誌論文〕①として公表した．

② M，N を d 次元，n 次元コンパクト多様体とし，$\Pi\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$を滑らかな submersion とする．M 上のベクトル場$V_0, \cdots, V_r$により駆動される次の確率微分方程式とスケルトン常微分方程式

$$\mathrm{d}X_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{r} V_i(X_t^\varepsilon)\circ dw_t^i + \varepsilon^2 V_0(X_t^\varepsilon)dt, X_0^\varepsilon = x$$

$$\mathrm{d}\phi_t = \sum_{i=1}^{r} V_i(\phi_t)\circ dh_t^i$$

の解X_t^ε, ϕ_tを用いて$Y_t^\varepsilon = \Pi(X_t^\varepsilon)$, $\psi_t = \Pi(\phi_t)$と定義する．ただし，w_tは r 次元 Wiener 過程，

$$\mathrm{h} = (h_t) \in H = \left\{\text{絶対連続}, \int_0^1 |\dot{h}_t|^2 dt < \infty\right\}$$

とする（上の積分を$\|h\|^2$と表す）．後述する仮定の下で$a \in N$に対し，

$$E[G_\varepsilon \delta_a(Y_1^\varepsilon)] \sim e^{-\frac{d_a^2}{2\varepsilon^2}} e^{-(n+n')}(c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 \cdots) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

という漸近挙動を証明できた．ただし，G_εは良い漸近挙動を持つ Wiener 汎関数であり，定義されていないd_a, n'は以下に述べる仮定(A)，(B)の中で現われる：

[仮定(A)] 少なくとも 1 つはV_i $(1 \le i \le r)$を含むV_k $(0 \le k \le r)$の重複リー括弧積の全体を L とすると$\{(\Pi_*)W: W \in L\}$が各点でT_xNを張る．

[仮定(B)] $K_a = \{h: \psi_1[h] = a\}$は空でなく，その各点で deterministic Malliavin 共分散行列非退化であり，さらに$d_a = \min\ \{\|h\|: h \in K_a\}$とおけば$K_a^{min} = \{h \in K_a: \|h\| = d_a\}$は滑らかな n′次元コンパクト多様体である．また$\|h\|^2/2$のヘシアンが$T_hK_a \cap (T_hK_a^{min})^\perp$上非退化である．

この研究は稲浜譲氏と共同で行ったが，その際に[4]で導入した多様体上の Malliavin 解析をより精密に再構築した．

ここで扱った多様体 M, N の典型例として，リーマン多様体上 N 上のブラウン運動を，直交枠バンドル O(N)上の確率微分方程式の解の射影として実現する Elles-Elworthy-Malliavin の方法が挙げられる．さらに，①で述べたユニタリ枠バンドル上の確率微分方程式を利用する強擬凸 CR 多様体上の CR ブラウン運動の構成もこの枠組に入っている．とくに，強擬凸 CR 多様体である奇数次元単位球面に対し，上記仮定(A)，(B)について具体的に調べた．

これらの結果は，後述〔雑誌論文〕②として公表した．

③（M,D,g）をサブリーマン多様体とする．すなわち，(i) M は連結かつ滑らかな d 次元微分多様体であり，(ii)接バンドル TM の分布$\mathrm{D} = (D_x)_{x\in M}$は一定ランク n を持ち，さらに各点$x$∈M で Hörmander 条件を満たし，(iii) $g = (g_x)_{x\in M}$は各点 x でD_xの内積となっている．リー括弧積[,]を用いて，$D^0(x) = \{0\}, D^k(x) = [D^{k-1}, D](x)$ $(k = 1,2, \ldots)$と定義し，各 $\dim D^k(x)$ は x によらない定数であると仮定する．すなわち，(M,D,g)は equi-regular であると仮定する．

D を水平方向とする gradient を∇とし，div を滑らかな測度μに関する divergence とする．D に付随するサブラプラシアンをΔ＝div∇と定義し，対応する熱核を $p(t,x,y)$とすれば，

次のような短時間漸近挙動を証明した．

$$p(t,x,x) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}}(c_0 + c_1 t + \cdots) \quad (t \downarrow 0).$$

ただし，Nをdim$D^m(x) = d$となる最小のm，

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m} k(\dim D^k(x) - \dim D^{k-1}(x))$$

とする．

・この証明のためにΔを生成作用素とする拡散過程を，Elles-Elworthy-Malliavin の方法をサブリーマン多様体に拡張することで，Wiener 汎関数として構成した．具体的には，g を M 上の自然なリーマン計量に拡張し，そのリーマン計量の定める Levi-Civita 接続を D に制限することで D 上の部分接続を構成する．この部分接続の定める接続形式を拡張することで，直交枠バンドル

$$O(\mathrm{D}) = \coprod_{x \in M} \{u: R^n \to D_x: \text{等距離写像}\}$$

の水平方向を決定する．このとき，$O(\mathrm{D})$上の基本水平ベクトル場$L_1, \ldots, L_n$が構成でき，さらに水平なベクトル場L_0が取れ，M 上の滑らかな関数 $\boldsymbol{f}$に対し

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i^2 + L_0\right) f(\pi) = \frac{1}{2}(\Delta f)(\pi)$$

が成り立つ．ただし，πは直交枠バンドルの M への射影である．これにより，$O(\mathrm{D})$上の確率微分方程式

$$du_t = \sum_{i=1}^{n} L_i(u_t) \circ dB_t^i + L_0(u_t)dt$$

の解u_tを M に射影して得られる$X_t = \pi(u_t)$がサブラプラシアンΔを生成作用素とする拡散過程を実現する Wiener 汎関数であることが導かれる（B_tは n 次元ブラウン運動）．さらにDが Hörmander 条件を満たすことにより，X_tは Malliavin 解析の意味で滑らかかつ非退化となっている．よってΔに対する熱核が，リーマン多様体の場合と同様に

$$p(t,x,y) = E[\delta_y(X(t,x))]$$

と期待値表現される．

・無限次元自由リー群と多重 Wiener 積分への Malliavin 解析の応用，局所化の議論を組み合わせることにより，上記の表示から具体的に$\alpha, c_0, c_1, \ldots$を与える公式を導き出した．

・M がリーマン多様体の場合，3D コンタクト・サブリーマン多様体の場合，CR 多様体の場合，ステップ 2 の equi-regular サブリーマン多様体の場合に，具体的にc_0を求めた．ただし，ステップ 2 とは$D^2(x) = T_x M \ (\forall x \in M)$となっていることをいう．

・確率面積を

$$S_t^{ij}(x) = \int_0^t \{(x + B_s^i) \circ dB_s^j - (x + B_s^j) \circ dB_s^i\}$$

と定義し，それらの線形結合を

$$S_t(x) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} \Xi^{ij} S_t^{ij}(x)$$

とおく．報告者による[5]の結果を利用して，この Wiener 汎関数のピンド確率振動積分

$$\mathrm{E}[e^{\sqrt{-1}S_t(x)} \delta_y(x + B_t)]$$

の初等関数を用いた具体的な表現を与えた．なお，この結果が一様磁場をもつシュレディンガー作用素の基本解の表示に関連することを〔学会発表〕②で報告した．

これらの成果は論文としてまとめ投稿中であり，プレプリント arXiv:1706.02450v1 として公開している．

<引用文献>

[1] S. Taniguchi, Malliavin's stochastic calculus of variations for manifold-valued Wiener functionals and its applications, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.　65 (1983), 269–290.

[2] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions, Comm. Pure Appl. Math., 25 (1972), 651–713.

[3] D. W. Stroock and S. Taniguchi, Regular points for the first boundary value problem associated　with degenerate elliptic operators, in "Probability theory and harmonic anlaysis" (eds. J.-A. Chao　and W.A. Woyczynski), Marcel Dekker, New York, 1986.

[4] S. Taniguchi, Malliavin's stochastic calculus of variations for manifold-valued Wiener functionals and its applications, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 65 (1983), 269–290.

[5] S. Taniguchi, Stochastic oscillatory integrals with quadratic phase function and Jacobi equations,
Probab. Theory Relat. Fields 114 (1999), 291–308.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① Hiroki Kondo and Setsuo Taniguchi, A construction of diffusion processes associated with sub-Laplacian on CR manifolds and its applications, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読あり, vol. 69, 2017 年, 111-125, DOI:10.2969/jmsj/06910111

② Yuzuru Inahama and Setsuo Taniguchi, Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus, Forum Math. Sigma,

査読あり，vol.5, 2017 年, e16，74 頁 (電子版)
DOI:10.1017/fms.2017.14

〔学会発表〕（計　２　件）
① 谷口説男，Rolling CR-manifold，研究集会「確率論と幾何学」(招待講演)，2015 年 11 月 09 日，東京工業大学
② 谷口説男，マリアバン解析と準楕円型作用素, 研究集会「確率解析の諸相」(招待講演), 2018 年 1 月 05 日，九州大学西新プラザ

〔図書〕（計　３　件）
① 谷口説男，朝倉数学辞典 (担当項目：伊藤の表現定理，確率積分，確率微分方程式，マリアバン解析), 朝倉書店，2016 年 6 月
② 谷口説男，確率微分方程式，共立出版，2016 年 9 月
③ Hiroyuki Matsumoto and Setsuo Taniguchi, Stochastic Analysis – Ito and Malliavin calculus in tandem, Cambridge University Press, 2017 年 1 月

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０　件）

○取得状況（計　０　件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.artsci.kyushu-u.ac.jp/~se2otngc/

６．研究組織
(1)研究代表者
谷口説男（TANIGUCHI, Setsuo）
九州大学・基幹教育院・教授
研究者番号：７０１５５２０８

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
松本裕行（MATSUMOTO, Hiroyuki）
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：　００１９０５３８

(4)研究協力者
なし