

令和元年6月7日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04936

研究課題名(和文) Malliavin解析による最適ヘッジ戦略の導出とその数値計算法の研究

研究課題名(英文) Research on mathematical expressions and numerical methods for optimal hedging strategies via Malliavin calculus

研究代表者

新井 拓児 (ARAI, Takuji)

慶應義塾大学・経済学部(三田)・教授

研究者番号：20349830

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：ジャンプ型確率過程によって記述される非完備市場を考え、2つの最適ヘッジ戦略 local risk-minimizing(LRM)とmean-variance hedging(MVH)に対し、Malliavin解析を用いてそれらの表現及び数値計算法の開発を目指した。とりわけ、(1)BNSモデルに対するLRMの導出と数値計算、(2)指数型加法過程モデルに対するMVHの表現の導出と数値計算、(3)normal inverse Gaussian過程モデルに対するLRMとMVHの数値計算、及び(4)BNSモデルに対するVIXオプションのLRMの表現と数値計算に関する研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非完備市場における最適ヘッジ戦略の理論研究はこれまで一定の成果を上げてきたが、これまでに得られた成果は最適ヘッジの存在や抽象的な表現の導出に留まっており、金融実務に適用されることはなかった。そこで、金融実務への貢献を念頭に、単に計算可能なモデルを選択するのではなく、実際の金融実務で使用されているモデルを選択し、具体的な設定に対して具体的な答えを与えることを目標とした。実際、数値計算法の開発では、金融実務においてそのまま利用できるような形で提示することができた。ファイナンスにおける数学的理論研究の成果を金融実務に還元することができたものと確信している。

研究成果の概要(英文)：Considering incomplete markets described by a jump type stochastic process, we aimed to derive, using Malliavin calculus, mathematical expressions of two optimal hedging strategies: local risk-minimizing (LRM) and mean-variance hedging (MVH) strategies; and to develop numerical methods for them. We have solved the following problems: (1) mathematical expressions and numerical methods of LRM strategies for BNS models, (2) expressions and numerical methods of MVH strategies for exponential additive models, (3) computation on LRM and MVH for normal inverse Gaussian models, and (4) expressions and numerical methods of LRM strategies for VIX options for BNS models.

研究分野：解析学基礎

キーワード：数理ファイナンス 確率論 数値計算

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

数理ファイナンスにおいて、オプションなどの金融派生証券の価格は、市場が完備である場合、それを完全複製するヘッジ戦略の初期費用で与えられる。これは、資産価格過程をマルチンゲールにする測度、同値マルチンゲール測度の下での期待値によっても求めることができる。完備市場とは、全ての金融派生証券に対して完全複製戦略が存在する市場であり、一般に取引費用などが存在しない摩擦のない市場である。つまり、市場の完備性は現実離れた強い仮定である。そのため、完備性を持たない非完備市場に関する研究は重要である。非完備市場では完全複製戦略が存在しないため、その初期費用から価格を決定することができない。また、同値マルチンゲール測度は存在するが無限個存在するため、期待値から価格を求めても一意に定めることができない。そのため完全複製戦略に代わり、何らかの意味で最適となるヘッジ戦略を考えなくてはならない。これまで様々な最適ヘッジ戦略が提案されており、その数学的理論研究は大きく発展してきた。代表的な最適ヘッジ戦略として、local risk-minimizing(以下、LRM)と mean-variance hedging(以下、MVH) が挙げられる。他にも、効用関数をベースにしたものやリスク測度に関連したものがある。こうした最適ヘッジ戦略に関する数学的理論研究は、ここ 20~30 年程の間に急速に発展した。私自身も長年このテーマで研究を行ってきた。この分野においては、理論研究が発展する一方、金融実務に貢献できるような研究成果は殆ど現れなかった。そこで、金融実務への貢献を念頭に、最適ヘッジ戦略、とりわけ LRM と MVH の明示的表現の導出と、数値計算法の開発を目指すことにした。さらに、資産価格過程がジャンプを含むモデルの解析は実務的な観点からも極めて重要であることから、資産価格過程がジャンプ型確率過程で記述されるモデルに焦点を絞った。なお、資産価格過程がジャンプを含む場合は、基本的に市場は非完備になる。LRM と MVH について詳しく論じよう。LRM は Föllmer-Schweizer 分解という確率変数の確率積分に関する直交分解により得られる。この Föllmer-Schweizer 分解は、minimal martingale measure(以下、MMM) という同値マルチンゲール測度の下での直交分解であり、マルチンゲールの表現定理を用いて導出できることが分かっている。しかし、マルチンゲールの表現定理からは、確率積分の被積分関数となる可予測過程の具体的表現を得ることができない。そこで、Lévy 過程に対する Malliavin 解析を用いて、ジャンプ型確率微分方程式の解で資産価格が記述されるモデルに対する LRM の表現を導出した。これを鈴木良一氏(当時、慶應義塾大学大学院理工学研究科博士後期課程在学)との共著論文 Arai and Suzuki(International Journal of Financial Engineering, vol.2, 1550015, 2015)にまとめた。Arai and Suzuki(2015)の前半では、鈴木氏の先行論文で得られた測度変換下での Clark-Ocone 型公式により、金融派生証券の Malliavin 微分の MMM 下での条件付き期待値を用いて LRM が表現されることを示した。さらに後半では、Malliavin 微分を計算し、より具体的な表現の導出を行った。しかし、鈴木氏の先行論文における測度変換下での Clark-Ocone 型公式には複雑な条件が課されている。よって、それらを確認するために膨大な計算が必要となる。ところが、確率微分方程式の係数がランダムネスを含まない場合に限定すると計算が単純化される。そこで、そのようなノンランダム係数の場合に対して、コールオプションなど代表的な金融派生証券の LRM の明示的表現を導出した。一方、MVH も LRM と同様、確率積分に関する直交分解により得られる。MVH の場合は、variance-optimal martingale measure(以下、VMM) と呼ばれる同値マルチンゲール測度における国田-渡辺分解という直交分解から得られる。しかし、MMM の密度関数の表現は比較的容易に導出できるが、一般に VMM の密度関数を具体的に計算する方法は、現時点では確立されていない。次に、数値計算法の研究について述べる。上述の鈴木氏との共著論文により、確率微分方程式の係数がノンランダムである場合に対するコールオプションの LRM の具体的表現が得られた。それは、満期における資産価格過程の汎関数の MMM 下での条件付き期待値で与えられる。一般に、Lévy 過程の確率密度関数の導出は困難であるが、Lévy 過程は特性関数によって特徴付けられるので、例え測度変換下であっても特性関数の導出は可能である。よって LRM の数値計算では、フーリエ変換をベースとした方法が最適である。そこで、幾何 Lévy 過程モデル、つまり確率微分方程式の係数が定数である場合に限定し、コールオプションの LRM に対する高速フーリエ変換ベースの数値計算法の研究を行った。その結果を鈴木氏と今井悠人氏(当時、早稲田大学理工学術院助手)との共著論文 Arai, Imai and Suzuki(International Journal of Theoretical and Applied Finance vol.19, 1650008, 2016)にまとめた。

2. 研究の目的

本研究は、数理ファイナンスにおける最重要トピックの一つである「非完備市場における金融派生証券の最適ヘッジ戦略」に関するものである。ジャンプ型確率過程によって記述される非完備市場を考え、代表的な最適ヘッジ戦略である LRM と MVH に対し、Lévy 過程に対する Malliavin 解析を用いてそれらの明示的表現を導出し、さらに高速フーリエ変換をベースとした数値計算法の開発を目指した。とりわけ、ジャンプ型確率ボラティリティモデルの代表である Barndorff-Nielsen and Shephard (以下、BNS)モデルを扱った。本研究の目的は、理論研究の金融実務への還元であり、新たな研究手法の導入など Malliavin 解析に対する貢献も目指した。

3. 研究の方法

本研究では、(1) BNS モデルに対する LRM の導出とその数値計算法の開発、(2) MVH の表現の導出とその数値計算法の開発、の順で研究を行った。特に(2)に関しては、確率微分方程式の係数がランダムネスを含まない場合、BNS モデルへの拡張、の2段階に分けて行ったが、この段階へは進めなかった。そこで VIX オプションの LRM など、現段階で解ける問題に取り組んだ。

4. 研究成果

平成27年度では、当初の計画通り、ジャンプ型確率ボラティリティ モデルの代表格である BNS モデルに対して、LRM の明示的表現の導出と数値計算法の研究を行い、得られた研究成果を2つの論文にまとめた。まず「Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models」(Arai, Imai and Suzuki, Finance & Stochastics, vol.21, pp.551-592, 2017)では、Arai and Suzuki (2015)の結果に基づいて LRM の表現を導出し、高速フーリエ変換ベースの数値計算法を提案した。さらに、「Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models with volatility risk premium」(Arai, Advances in Mathematical Economics, vol.20, pp.3-22, 2016)では、上記の論文とは異なるパラメータの設定に対して研究を行った。パラメータの設定が異なると同じ方法はもはや適用できないため、異なるアプローチを用いて LRM の表現の導出を行った。

平成28年度も当初の計画通りに研究を遂行した。指数型加法過程モデルに対して、MVH の明示的表現の導出と数値計算法の研究を行った。ここで、指数型加法過程とは、対数を取ったものが、必ずしも定常とは限らないが独立増分になる確率過程のことである。この研究において得られた成果を論文「A numerically efficient closed-form representation of mean-variance hedging for exponential additive processes based on Malliavin calculus」(Arai and Imai, Applied Mathematical Finance vol.25, pp.247-267, 2018)にまとめた。通常、MVH の表現はフィードバック形式、つまり、過去の MVH の値を含む形式で与えられる。しかし、この形式の表現からは数値計算を行うことができないため、過去の値を含まない閉じた形式の表現を、Lévy 過程に対する Malliavin 解析を用いて新たに導出し、それをベースに高速フーリエ変換を用いた数値計算法を開発した。

平成29年度は、当初の計画に沿い、BNS モデルに対する MVH の明示的表現の導出と数値計算法の研究を行った。しかし、論文という形にまとめるに至らなかった。特に、最小分散マルチンゲール測度の導出が難しく、先行研究である Cerny and Kallsen (2007)の結果を用いるなど工夫を凝らしたが解決することができなかった。一方、代表的な Lévy 過程である normal inverse Gaussian 過程を対数資産価格過程に持つ指数型 Lévy 過程モデルに対して、平成28年度までに開発した高速フーリエ変換ベースの手法を用いて、LRM と MVH の数値計算を行った。実データを用いたパラメータの推定にも取り組んだ。得られた成果を論文「Numerical analysis on quadratic hedging strategies for normal inverse Gaussian models」(Arai, Imai and Nakashima, Advances in Mathematical Economics vol.22, pp.1-24, 2018)にまとめた。

研究期間を延長した平成30年度も引き続き BNS モデルに対する MVH の明示的表現の導出と数値計算法の研究を行う予定であったが、数学的に困難であるため少し予定を変更して、BNS モデルに対し、VIX というボラティリティ インデックスのオプションを考え、その価格と LRM の数学的表現の導出及び数値計算に関する研究を行った。その成果を論文「Pricing and hedging of VIX options for Barndorff-Nielsen and Shephard models」にまとめ、平成31年4月に学術雑誌に投稿した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 8 件)

T. Arai, Y. Imai and R. Nakashima, Numerical analysis on quadratic hedging strategies for normal inverse Gaussian models, Advances in Mathematical Economics, 査読有, Vol.22, pp.1-24, 2018. DOI: 10.1007/978-981-13-0605-1_1

T. Arai and Y. Imai, On the difference between locally risk-minimizing and delta hedging strategies for exponential Lévy models, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, Vol.34, pp.845-858, 2017. DOI: 10.1007/s13160-017-0268-6

T. Arai, Good deal bounds with convex constraints, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 査読有, Vol.20, 1750011, 2017. DOI: 10.1142/S021902491750011X

T. Arai, Y. Imai and R. Suzuki, Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models, Finance & Stochastics, 査読有, Vol.21, pp.551-592, 2017. DOI: 10.1007/s00780-017-0324-8

T. Arai, Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models with volatility risk premium, Advances in Mathematical Economics, 査読有, Vol.20, pp.3-22, 2016. DOI: 10.1007/978-981-10-0476-6_1

T. Arai, Y. Imai and R. Suzuki, Numerical analysis on local risk-minimization for

exponential Lévy models, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 査読有, Vol.19, 1650008, 2016. DOI: 10.1142/S0219024916500084
Y. Imai and T. Arai, Comparison of local risk minimization and delta hedging strategy for exponential Lévy models, JSIAM Letters, 査読有, Vol.7, pp.77-80, 2015. DOI: 10.14495/jsiaml.7.77
T. Arai and R. Suzuki, Local risk-minimization for Lévy markets, International Journal of Financial Engineering, 査読有, Vol.2, 1550015, 2015. DOI: 10.1142/S2424786315500152

〔学会発表〕(計 12 件)

T. Arai, A closed form representation of mean-variance hedging for additive processes via Malliavin calculus, the 10th World Congress of the Bachelier Finance Society, Dublin, 2018年7月16日.

T. Arai, A closed form representation of mean-variance hedging for additive processes via Malliavin calculus, 40th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, Gothenburg, 2018年6月14日.

新井拓児, Optimal initial capital induced by optimized certainty equivalent, 数理経済学会 2017年度研究集会, 慶應義塾大学, 2017年10月27日.

T. Arai, A closed form representation of mean-variance hedging for additive processes via Malliavin calculus, 8th General AMAmEF Conference, Amsterdam, 2017年6月21日.

T. Arai, Mean-variance hedging for additive processes via Malliavin calculus, Mathematical Economics 2017 Workshop at Keio, 慶應義塾大学, 2017年3月17日.

T. Arai, Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models, SIAM conference on Financial Mathematics & Engineering, Austin, 2016年11月19日.

T. Arai, Convex risk measures for càdlàg processes on Orlicz spaces, Keio Symposium on Risk Assessment, 慶應義塾大学, 2016年9月21日.

T. Arai, Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models, Boston University/Keio University Workshop 2016, Boston University, 2016年8月19日.

T. Arai, Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models, The 10th Bachelier Colloquium on Mathematical Finance and Stochastic Calculus, Metabief, 2016年1月20日.

新井拓児, Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models, 確率論シンポジウム, 岡山大学, 2015年12月17日.

新井拓児, 数理ファイナンスに現れる Lévy 過程, 統計数理研究所・共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」(特別講演), 統計数理研究所, 2015年12月4日.

T. Arai, Local risk-minimization for Barndorff-Nielsen and Shephard models with volatility risk premium, RIMS 研究集会「Mathematical Analysis in Economic Theory」, 京都大学, 2015年11月26日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/arai/>

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。