

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 9 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04938

研究課題名(和文) 特異積分と関数空間の研究(多重線形作用素を視野に入れて)

研究課題名(英文) A study of singular integral operators

研究代表者

古谷 康雄 (Furuya, Yasuo)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：70234903

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：多重線形作用素の様々な関数空間上での有界性を調べた。特にI型とよばれる多重線形分数べき作用素の性質を調べた。ふつうの分数べき作用素は臨界指数 L^1 においては弱い有界作用素にしか成り立たないが、この作用素は臨界指数においても制限を加えると強い有界性が成り立つことを証明した。またこの作用素をradial関数に制限したときのセントラルモレー空間上での有界性も証明した。応用としてbilinear fractional integralに関するStein-Weissの不等式を改良した。

研究成果の概要(英文)：We consider the boundedness of singular integral operators. In particular we study multilinear fractional operators and obtain the strong type estimates on product of Lebesgue spaces at critical indices. We also improve bilinear Stein-Weiss inequality.

研究分野：実解析学

キーワード：特異積分 ハーディー空間 多重線形作用素 モレイ空間

1. 研究開始当初の背景

n次元ユークリッド空間上での一般化された特異積分作用素

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

の様々な関数空間上での有界性については、 $T1=0$ という仮定のもとで多くの研究者により多くの結果が得られて来ていた。我々はこの仮定を弱めた条件の下での有界性を得て来た。たとえば「 $T1$ がリプシッツクラスに属するならば T は Hardy 空間から local Hardy 空間への有界作用素である」など。その他 Herz 型の空間、リプシッツ空間、ソボレフ空間、Morrey 空間などでの有界性を示して来た。local Hardy 空間は既に知られていた空間であるが、他の空間上での有界性を調べるために導入した「local Herz-Hardy 空間」などは我々が考えたものである。その他にも応用上有効な新しい空間がみつきたい。

上記の我々の得た結果の典型的な応用例はカルデロンの交換子作用素

$$Ca f(x) = \int (a(x) - a(y))/(x-y)^2 f(y)dy$$

と、さらに重要な作用素である複素平面上のコーシー積分作用素

$$Cf(z) = \int f(w)/(w-z)dw$$

(dw は曲線上の測度)の Hardy 空間上での有界性である。

上記の結果が得られたことにより我々の研究方針であった「 L^p 理論で有効であった「 $T1$ 定理」は Hardy 空間においても有効である。そしてその応用のために「原子」「分子」の概念の拡張が必要である」という考え方が間違っていなかったことを示している。上記の例はすべて1次元の作用素である。このタイプの作用素のn次元版であり偏微分方程式の理論とも深い関わりのある double layer potential operator の Hardy 空間上での有界性を示したい。double layer potential operator はポアソン方程式のディリクレ問題において境界の滑らかさをぎりぎりまで弱めた(リプシッツ曲面)場合の問題、流体の問題と関係があるので、偏微分方程式の研究者とも交流をはかりたい。

さらに一般化された特異積分に属する作用素である擬微分作用素についても我々の理論が適用できることが分かり「 $S^1_{\{0,1\}}$ クラスに属する擬微分作用素から作られるカルデロンの交換子型の作用素の local Hardy 空間上での有界性」を証明できた。これは Coifman-Meyer の L^p 理論を Hardy 空間に拡張したものである。この結果を得るには交換子作用素のもつ平滑化効果の重要性が重要である。 $S^1_{\{0,1\}}$ クラスは話の始まりであり、もっと一般の $S^m_{\{ , \}}$ のクラスに属する擬微分作用素について同様の結果を得たい。

非線形問題を解くときの一つの方法としての多重線形作用素を考えるという方法は、Bony の para-product や Coifman and Meyer の研究など、以前からあったが、近年2重線形ヒルベルト変換

$$BH(f,g)(x) = \int f(x-y)g(x+y)/y dy$$

の重要性が認識されてから、新しい視点での研究が始まっている。この作用素は前述のカルデロンの交換子作用素の有界性を証明する途中でカルデロンが導入したのもので、交換子作用素の有界性は別の方法で Coifman-McIntosh-Meyer によって証明されたが、2重線形ヒルベルト変換の有界性は未解決のまま残されていた。20世紀末に部分的に解決されたが、完全解決は21世紀の重要な問題として残されている。この作用素から派生した多重線形分数ベキ積分作用素

$$BI (f,g)(x) = \int f(x-y)g(x+y)/y^{\alpha} dy$$

の有界性について研究を始めようと思った。一方で様々な作用素のモレー空間上での性質を調べることも近年盛んに研究されているので、その方向での研究も進めようと思った。特に特異積分作用素と分数ベキ積分作用素の研究を中心においた。さらにルベグ空間における有界性だけでなく、重みをつけた評価というものも重要な意味を持つので、様々な作用素の重みつき評価も研究目標とした。

2. 研究の目的

多重線形作用素、特に多重線形特異積分作用素と多重線形分数ベキ積分作用素に関する様々な空間上での有界性を調べる。さらに重みつき有界性も調べることを目標とした。詳しく述べると多重線形分数ベキ積分作用素の臨界指数空間における評価を考える。線形の分数ベキ積分作用素の重みつき評価として知られている スタイン・ワイスの不等式と呼ばれている不等式を様々な方向で改良することを目標とした。特異性が非常に強くで解析が困難な2重線形ヒルベルト変換から派生した2重線形フラクショナル積分作用素の重みつき評価に関する Moen の結果を改良することを目標とした。

3. 研究の方法

本研究では、研究課題を具体化した数本のテーマに沿って、研究代表者と研究分担者の個別研究の推進とともに、分担者間の直接の研究交流を最も重要して進めた。そのために、いくつかの研究テーマによる研究分担者会議と研究集会を開催し、基盤研究を推進した。代表者が主催した研究集会は3つ。調和解析セミナー、首都大学東京、2015年12月。調和解析セミナー、金沢大学、2017年3月。調和解析セミナー、日本大学、2018年3月。科研費により補助をした研究集会は3つ。実解析学シンポジウム、東邦大学、2015年10月。実解析学シンポジウム、奈良女子大学、2016年10月。実解析学シンポジウム、名古屋大学、2017年10月。さらに調和解析駒場セミナーの共同主催者として月一度のセミナーを開催した。その後継の調和解析中大セミナーの共同主催者として月一度のセミナーを開催した。

4. 研究成果

多重線形作用素の様々な関数空間上での有界性を調べた。特にI型とよばれる多重線形分数ベキ作用素の性質を調べた。ふつうの分数ベキ作用素は臨界指数 L_1 においては弱い有界作用素にしか成り立たないが、この作用素は臨界指数においても制限を加えると強い有界性が成り立つことを証明した。さらにその件が最良であることも証明した。同様に L 空間がある場合も線形の場合と違い強い有界性が成り立つことを示した。

作用素の作用する関数に対称性がある場合は「改良された評価が得られる」という大原則がある。その例としてradial関数に制限したときの分数ベキ積分作用素に関して既知の結果を改良することができた。セントラルモレー空間上での有界性も証明した。この結果は L_p 空間におけるde Napoli, Drelichman and DuranとDuandikoetxeaの結果に別証明と与えたことにもなる。この方向をさらに推し進めてbilinear fractional integralに関するStein-Weissの不等式を改良した。この結果はMoenの結果を改良したことになる。またbilinear Caffarelli-kohn-Nirenbergの定理を改良したことにもなる。

一方で我々が新しく導入した関数空間である B 空間における分数ベキ積分作用素の重みつき評価も証明することができた。

ここまで述べたI型より特異性がさらに強い二重線形分数ベキ作用素 $B I$ の重みつき評価に関する結果も得た。Moenは値域の指数 r が1以下の場合のみの結果であったが、我々は r が1以上の場合も証明することができた。さらにこの結果は $r=1$ の場合はMoenの結果を改良したものである。重みの満たすべき条件を弱めることができた。さらに今まで知られていた十分条件が実は必要条件にはならないという反例も見つけることができた。またべき乗の重みに限れば一般論では全く結果が得られていなかった範囲の p, q, r においても重みつき評価を証明することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Y. Komori-Furuya and E. Sato, Weighted estimates for fractional integral operators on central Morrey spaces, Math. Nachr., 査読あり, 290, 2017, pp. 2901--2908.

Y. Komori-Furuya and E. Sato, Fractional integral operators on central Morrey spaces, Math. Ineq. and Appl., 査読あり, vol. 20 no.3, 2017, pp. 801-813.

Y. Komori-Furuya, Notes on endpoint

estimates for multilinear fractional integral operators, Proc. Amer. Math. Soc., 査読あり, 145, 2017, pp. 1515-1526.

Y. Komori-Furuya and K. Matsuoka, Fractional integrals on B -weighted Morrey spaces, Math. Ineq. and Appl., 査読あり, Vol. 19 no.3, 2016, pp. 969-980.

Yasuo Komori-Furuya,

A note on multilinear fractional integral operators. RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読あり, B56, 2016, pp. 43-50.

[学会発表](計 4 件)

Notes on bilinear fractional integrals, 調和解析セミナー, 日本大学, 2018年3月4日

多重線形 fractional integral に関する最近の話題, 調和解析セミナー, 金沢大学, 2017年3月4日

An improvement of bilinear Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality for radial functions, 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学, 2016年10月

領域上の Sobolev, Besov 空間の基礎, 調和解析セミナー, 首都大学東京, 2015年12月25日

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

古谷 康雄 (FURUYA, Yasuo)

東海大学・理学部・教授

研究者番号: 70234903

(2) 研究分担者

澤野 嘉宏 (SAWANO, Yoshihiro)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号：40532635
松山 登喜夫 (MATSYAMA, Tokio)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：70249712

(3) 連携研究者 なし