

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04944

研究課題名(和文) 確率効果をもつ非線形分散型方程式の研究

研究課題名(英文) Research of nonlinear dispersive equations with stochastic effects

研究代表者

福泉 麗佳 (Fukuizumi, Reika)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：00374182

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ナノデバイスにおける波の伝わり方(たとえば量子力学的な粒子の動き方)を解析するために使われるモデル方程式の解析を行った。非線形効果が大きければエネルギー有限なクラスで、基底状態よりエネルギーの低い初期データに関して解が散乱するという事実を厳密に証明した。さらに、関連する量子ウォークの漸近挙動についても調べた。

正の温度でのボース・アインシュタイン凝縮のモデルである加法的ノイズと散逸項を伴うグロス・ピタエフスキー方程式に関して空間1次元の場合に、Gibbs測度で表される熱平衡状態を構成、解分布が時間無限大で指数的にGibbs分布に従うことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、ボース・アインシュタイン凝縮や光ファイバー通信のモデルに現れる、確率的な摂動を伴う非線形シュレディンガー方程式について、解の挙動、および摂動の特殊解(定在波・渦など)への影響を理論的に解明し、物理や工学において期待される現象の数学的実証を行うのが目的である。本研究の成果により、ナノデバイス中にスリットがある場合に内部を伝搬する波がどのような時間大域的挙動をするのか数学により解明された。また、熱的効果を考慮したボース・アインシュタイン凝縮モデルの凝縮体波動関数の分布が時間無限大で指数的にGibbs分布に収束することも厳密に正当化した。

研究成果の概要(英文)：We studied a model that describes a wave propagation in a one-dimensional linear medium containing a narrow strip of nonlinear material, where the nonlinear strip is assumed to be much smaller than the typical wavelength. This model is used, for example, a wave propagation in nanodevices. We showed that for a large non linearity (called mass super critical), if the initial energy is below the energy of the ground state, the solution scatters in the energy class. Moreover we investigated the asymptotic distribution of the quantum walk associated with this nanodevice model.

On the other hand, we considered the Gross-Pitaevskii equation at positive temperature, where the temperature effect is described by a dissipation and white noise in the equation. We showed that the system converges exponentially to the Gibbs equilibrium as times goes to infinity, in one spatial dimension.

研究分野：関数方程式論

キーワード：解析学 非線形分散型方程式 散乱 時間大域的挙動

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

実験によるボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) の実現により、BEC のモデル方程式である、磁場やレーザーによるトラップを考慮した非線形 Schrödinger 方程式の研究は勢いを増し、現在では観測対象への興味に応じて様々な改良型が提案され実験が行われている。BEC 捕獲のため光学トラップ使用の際は、レーザーの強度変化をノイズとしてモデルに組み込む必要がある。また、確率的に分散係数が変化する非線形 Schrödinger 方程式は非線形光学において長距離光通信モデルとして現れ大変重要である。前述の光学トラップ使用 BEC のモデルについて、研究代表者は、

- ・ 初期値問題可解性(モデルの正当化): ノイズを伴う線形 Schrödinger 作用素に対するランダムストリッカーズ評価の導出, Schrödinger 方程式の解のブラウン運動に関する連続性の証明
- ・ 爆発が起こる可能性のある初期条件の調査
- ・ ノイズが安定定在波解に及ぼす影響: ノイズの摂動強度と比較してどの程度の時間スケールで安定性の崩れが起きるのか

等の研究を行った経験があり、その知識を生かし拡張して、様々なモデルとして導出される確率効果を持つ非線形分散型方程式の性質を調べる計画を練った。

2. 研究の目的

確率的な摂動を伴う非線形 Schrödinger 方程式について、解の挙動、および摂動の特殊解(定在波・渦など)への影響を理論的に解明し、物理や工学において期待される現象の数学的実証を行うのが目的である。特に本研究当初の目的は次の2点であった。

- (1) 物理的に興味のある対象として(量子)渦のダイナミクスが挙げられる。渦の挙動の研究を行い、ノイズと渦の関わり、渦に対してノイズが及ぼす効果を理論的に明らかにする。
- (2) 光ファイバー内の媒質や、分散性をランダムに変化させることで光通信の長距離化が可能になる。光パルスの伝播モデルは非線形 Schrödinger 方程式で与えられる。空間1次元、5次の引力相互作用を持つ非線形 Schrödinger 方程式は爆発解を持つことが知られているが、この方程式の分散係数をランダムに変化させると、解は爆発せず大域的に存在することが Debussche-Tsutsumi J. Math. Pures Appl. 2011 で数学的に証明されている。このような分散係数や媒質がランダムに変化する非線形 Schrödinger 方程式のランダム効果による影響を調べる。

3. 研究の方法

(1) 渦に対してノイズが及ぼす効果を理論的に明らかにする研究について、研究開始当時は、偏微分方程式論的手法により(具体的には、方程式の制御可能性問題を解くことにより)、例えば、ノイズの強度と比較して渦の崩れの最適時間スケールを理論的に示すことを考えていた。しかし、物理の研究者と議論するうちに、非線形 Schrödinger 方程式に時空ホワイトノイズが摂動に加わった方程式の熱平衡状態近傍における相転移を調べることににより、量子渦の振る舞いを調査するという考え方があることを知った。そのため、方程式中にノイズを含む熱的要素を取り込み、それによって生じる熱平衡状態がどのようなものになるかを、空間1次元でかつ加法的時空ホワイトノイズ、さらには斥力型非線形項という数学的には取扱いが最もシンプルな場合に考察を行った。

(2) 光ファイバーモデルとして、論文 Henning et al. (Phys. Lett. A 1994) に現れ、ナノデバイスにおける波の伝わり方(たとえば量子力学的な粒子の動き方)を解析するために使われる Schrödinger 方程式の解析を行った。デバイス構造が周期的あるいは準周期的なストリップ(さらにはランダム配置)を持つ場合を考慮したものが現実的なモデルであるが、まずはストリップが一つだけの場合に着目し、プロファイル分解による解の大域挙動を調べた。

4. 研究成果

(1) 第一に、有限温度ボース・アインシュタイン凝縮のモデルである加法的ノイズと散逸項を伴うグロス・ピタエフスキー方程式に関して成果を得た。当モデルにおいて空間1次元の場合に、Gibbs 測度で表される熱平衡状態を構成、解分布が時間無限大で指数的に Gibbs 分布に従うことを示した。最終年度はさらに渦生成を考慮したときに必要となる化学ポテンシャル項をモデルに加えた上で、Gibbs 分布に指数的に収束することも示すことができ、それらすべての結果をまとめた論文が[2]として出版された。その結果の拡張として空間2次元モデルについても研究を進め、現在論文としてまとめている。

(2) 第二に、論文 Henning et al. (Phys. Lett. A 1994) に現れ、ナノデバイスにおける波の伝わり方(たとえば量子力学的な粒子の動き方)を解析するために使われる Schrödinger 方程式の解析を行った。デバイス構造が周期的あるいは準周期的なストリップ(さらにはランダム配置)を持つ場合を考慮したものが現実的なモデルであるが、まずはストリップが一つだけの場合に着目した。ここ10年の間に非線形 Schrödinger 方程式の解の漸近挙動を調べる手法が飛躍的に発展した一方で、当モデルである非線形項効果がとても強い特異性を持つ場合に(数学的には、特異性はデラックのデルタ測度を用いて表される)、どんな条件下で散乱解が存在

するのかわかっていなかった。なぜなら、このモデルに対しては、モデルの持つ強い特異性の影響で、近年の常套手段であるストリッカーズノルムを基本にしたプロファイル分解による minimal blow-up solution の存在証明法をそのまま応用するのは適当でないからである。そこで本研究では、方程式の特質である Riemann-Liouville 分数冪積分作用素の平滑化効果と線形 Schrödinger 方程式の基本解の time homogeneous norm に関する平滑化を組み合わせるにより、非線形項が十分大きければエネルギー有限なクラスで、基底状態よりエネルギーの低い初期データに関して解が散乱するという事実を厳密に証明することに成功した。関連する論文は[4]である。

(3) 上述の項目(2) に関連する量子ウォークの漸近挙動についても調べた。媒質に一つだけ非常に強い「線形」特異性をもつ非線形 Schrödinger 方程式で Soliton scattering を考えたときの散乱行列と量子ウォークは関係を持つ。「非線形」特異性を持つ場合にはどのようにするのか、各頂点に「非線形」な境界条件を課した量子グラフを考え、その量子グラフから起因する問題として、ある意味「非線形」な量子ウォークの挙動について調査及び数値計算を行った。「線形」の境界条件を課した量子グラフの場合とは全く異なる挙動を捉えた。その結果が論文[1]である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

[1] Riccardo Adami, Reika Fukuizumi, Etsuo Segawa, “A nonlinear quantum walk induced by a quantum graph with nonlinear delta potentials,” Quantum Information Processing 18(2019) 119(1)-119(14) 査読有

[2] Anne de Bouard, Arnaud Debussche, Reika Fukuizumi, “Long time behavior of Gross-Pitaevskii equation at positive temperature,” SIAM. J. Math. Anal. 50(2018) 5887-5920 査読有

[3] Anne de Bouard, Arnaud Debussche, Reika Fukuizumi, Romain Poncet, “Fluctuations and temperature effects in Bose-Einstein condensation,” ESAIM: proceedings and surveys, 61(2018) 55-67 査読有

[4] Riccardo Adami, Reika Fukuizumi and Justin Holmer, “Schrödinger equation with point nonlinearity,” Report No.29 (2017) (DOI: 10.4171/OWR/2017/29) 「Nonlinear Partial Differential Equations on Graphs」Oberwolfach 数学研究所 査読無

[学会発表](計 14 件)

[1] 福泉麗佳 “BEC model with a trapping potential varying randomly in time- a review,” Scientific Computing Across Scales: Quantum Systems in Cold-matter Physics and Chemistry, Fields Institute, Toronto, Canada, 2019/4

[2] 福泉麗佳 “Bose-Einstein 凝縮モデルにおける温度効果,” 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会特別講演, 岡山大学, 2018/9

[3] 福泉麗佳 “On the stochastic Gross-Pitaevskii equation, Conference of Mathematics on Wave Phenomena,” KIT, Germany 2018/7

[4] 福泉麗佳 “Some theoretical studies on the stochastic Gross-Pitaevskii equation,” The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taipei, Taiwan 2018/7

[5] 福泉麗佳 “Scattering in the Schrödinger equation with a point nonlinearity,” The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taipei, Taiwan 2018/7

[6] 福泉麗佳 “Recent progress of theoretical and numerical research for BEC models,” 研究会「第4回量子渦と非線形波動」東京理科大学 2018/1/19

[7] 福泉麗佳 “On the Gibbs equilibrium in stochastic complex Ginzburg-Landau Equations” 東北大学片平キャンパスさくらホール「2017年確率論シンポジウム」 2017/12/13

[8] 福泉麗佳 “量子流体の数理モデル” 東北大学情報科学研究科棟 談話会「第72回情報科学談話会」 2017/11/14

[9] 福泉麗佳 “Gross-Pitaevskii equation at positive temperature” Rouen 大学(フランス) 「LMRS Colloquium」 2017/10/12

[10] 福泉麗佳 “Schrödinger equation with point nonlinearity” Workshop「Nonlinear Partial Differential Equations on Graphs」Oberwolfach 数学研究所 (ドイツ) 2017/6/23

[11] 福泉麗佳 “Long time behaviour of Gross-Pitaevskii equation at positive temperature,”

「第18回北東数学研究集会」東北大学 2017/2/20

[12] 福泉麗佳 “Exponential convergence to the equilibrium for the stochastic Ginzburg-Landau equation,” 研究会「第3回量子渦と非線形波動」東京理科大学 2016/11/10

[13] 福泉麗佳 “Exponential convergence to the equilibrium for the stochastic Gross-Pitaevskii equation,” IMA 研究集会「Mathematical and Physical Models of Nonlinear Optics」ミネソタ大学, アメリカ合衆国 2016/10/31

[14] 福泉麗佳 “Gibbs measure for the Gross-Pitaevskii equation driven by a space-time white noise,” 研究会「量子渦と非線形波動」東京理科大学 2016/01/20

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~fukuizumi/>

6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：Riccardo Adami

ローマ字氏名：Riccardo Adami

研究協力者氏名：Justin Holmer

ローマ字氏名：Justin Holmer

研究協力者氏名：瀬川 悦生

ローマ字氏名：Etsuo Segawa

研究協力者氏名：Anne de Bouard

ローマ字氏名：Anne de Bouard

研究協力者氏名：Romain Poncet

ローマ字氏名：Romain Poncet

研究協力者氏名：Arnaud Debussche

ローマ字氏名：Arnaud Debussche

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。