

令和 2 年 5 月 22 日現在

機関番号：12613  
研究種目：基盤研究(C) (一般)  
研究期間：2015～2019  
課題番号：15K04947  
研究課題名(和文)非線形ディラック方程式に対するモース・フレアー理論

研究課題名(英文)Morse-Floer theory for nonlinear Dirac equations

## 研究代表者

磯部 健志 (Isobe, Takeshi)

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：10262255

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：多様体上で定義された非線形ディラック型方程式の研究を行った。特に、i)方程式は解を持つか ii) 方程式の解空間の大域的な構造は多様体の幾何学的性質や方程式の非線形項にどのように依存するか、を研究した。i)に関しては非線形ディラック方程式、ディラック・測地線およびトーラスに値をとるディラック・調和写像の方程式に対して解の存在定理を証明した。ii)に関しては、ディラック方程式に対するモースホモロジーの構成および計算を実行して、解空間の大域構造の非線形項に関する依存性を明らかにした。

## 研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形ディラック方程式は幾何学や物理学において基本的な役割を果たしてきている重要な方程式である。本研究では、コンパクト多様体上の非線形ディラック方程式の解空間の大域的な構造を研究した。特に、方程式に対応する変分問題のモースホモロジーを定義し、ホモロジーの計算を実行した。主結果は、方程式のモースホモロジーは非線形項のホモトピー不変量として決まるというもので、これにより解空間の大域的な定性的・定量的な性質をホモロジーという代数的な量で捉えることができるようになった。

研究成果の概要(英文)：I studied nonlinear Dirac type equations defined on manifolds. In particular, I investigated the following questions: i) Do equations have any solutions? ii) How the global structure of the space of solutions depends on the geometrical structure of the manifolds and the nonlinearity of the equations. As for i), I proved the existence theorems of nonlinear Dirac equations, Dirac-geodesics and Dirac-harmonic maps into flat tori. As for ii), I have constructed and calculated Morse homologies for nonlinear Dirac equations and clarified how the global structure of the set of solutions depends on the nonlinear terms.

研究分野：大域解析学、幾何解析、変分問題

キーワード：モース理論 モースホモロジー ディラック方程式 ディラック・調和写像 ディラック・測地線

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

本研究課題は、多様体上定義された非線形ディラック型方程式の解の大域的な構造を、モース理論を用いて研究することであった。

幾何学に現れるほとんど全ての1階楕円型方程式はディラック型方程式であり、多様体上のディラック型方程式は、幾何学や物理学において基本的な役割を果たし続けている。このため、様々な側面から世界中の多くの研究者によって研究されてきた。特に、線形のディラック型方程式の研究は、ホッジ理論やその一般化であるアティヤ・シンガーの指数定理に代表されるような、数学全般に影響を及ぼす基本的結果をもたらした。非線形のディラック型方程式もまた線形の方程式と同様に、幾何学や物理学において重要であるが、その数学的取り扱いが可能になったのは比較的最近である。特に本研究課題と関連するような、多様体上の非線形ディラック型方程式の大域構造の研究の歴史は浅く、系統的に研究されるようになったのは比較的最近である。その代表的な例としては、サイバーグ・ウィッテン方程式を用いた幾何学的な不変量の構成が挙げられる。一方、非線形ディラック方程式を線形のディラック方程式と同じレベルで系統的に論じるという研究の方向性は今まであまりなく、特に幾何学や物理学で重要な変分構造を持つディラック型方程式の系統的な大域解析はほとんどなかった。このような理由から、10年以上前から非線形ディラック型方程式の系統的な大域解析学に興味を持ち始め、これまでに解の存在定理を変分的手法で証明してきた。一方、解空間の大域構造を深く理解するためにはモース理論の構築が不可欠であったが、ここで対象としていた非線形ディラック型方程式に適用できる一般的なモース理論はこれまではなかった。そこで、本研究課題で、一般的な状況下で、多様体上の非線形ディラック型方程式に対するモース理論、特にモースホモロジーの構成と計算を実行することを計画した。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、上述のような背景から、多様体上の非線形ディラック型方程式に対してモース理論、特にモースホモロジーの構成と計算方法を確立し、方程式の解空間の大域的構造を解明することであった。具体的には次のタイプのディラック型方程式に対してモース理論を構築することを目標に挙げた：(1) ディラック型作用素のベキ型の非線形項による摂動として得られる非線形ディラック方程式、(2) 場の量子論における超対称性シグマモデルの数学モデルであるディラック・測地線および(3) ディラック・調和写像。(1)、(2)、(3)は全て方程式の解が変分問題の臨界点として特徴付けられる非線形ディラック型方程式である。これら変分問題は、ディラック作用素の固有値が上下に有界でないことから臨界点におけるモース指数が無限大になるという意味で強不定値型であり、通常の臨界点理論やモース理論は通用しない。そこで本研究ではこれらの強不定値型変分問題に対して適用可能な、正則化されたモース理論であるフレアー型のモースホモロジー論を展開することを目指した。また、これらのディラック型方程式に対しては解の存在定理は今まで証明されていなかったため、モースホモロジーの構成と計算の応用として解の存在定理を証明することも目的とした。

### 3. 研究の方法

研究目的で挙げた非線形ディラック型方程式に対してモース理論を展開するためには、臨界点においてモース指数が無限大であることから、正則化されたモース理論である、フレアー型のモース理論を展開する必要がある。フレアー型のモース理論は、臨界点を結ぶ汎関数の勾配流からなるモジュライ空間の大域解析に基づく。以下、(1)~(3)それぞれの場合について、モースホモロジーの構成と計算方法のアイデアを述べる。

(1) ディラック型作用素のベキ型の非線形項による摂動として得られる非線形ディラック方程式に対応する変分問題は、問題が自然に定義される関数空間において汎関数は高々2回微分可能でしかなく、モースホモロジーの構成に一般的に必要な十分な滑らかさを持っていない。このため、本研究では、完備ではないが汎関数の正則性が保たれるより正則性の良い関数空間上で勾配流のモジュライ空間の大域解析を行う。このような強い正則性を持つ関数空間上でモースホモロジーの構成を行うには、勾配流からなるモジュライ空間のコンパクト性に関して通常より強いコンパクト性が必要となるため、勾配流方程式の解の詳細な評価を行う。また、ホモロジーを計算するために、ホモロジーが非線形項の無限遠方における振る舞いだけで決定されることを、ホモトピーに依存する勾配流空間を詳細に解析することで示す(「接続原理」)。このホモロジーの非線形項に関するホモトピー不変性から、ホモロジーの計算は特別な非線形項に対するホモロジーの計算に帰着される。具体的に計算が可能になる非線形項を見つけ出し、その非線形項に対してホモロジーの計算を実行することで、一般の場合のモースホモロジーの計算を実行する。ホモロジーがわかると、方程式の解の大域構造に関する情報が得られる。この情報をもとに、解の存在とその個数の評価を行う。

(2) ディラック・測地線のモースホモロジーの構成には(1)のアイデアを用いる。しかし、(1)のホモロジーの計算方法はこの場合には適用できない。本研究ではディラック・測地線の変分問題の

配位空間が、ループ空間上のヒルベルトベクトルバンドルの構造を自然に持つこととディラック・測地線汎関数のループ空間および各ファイバーへの制限がそれぞれ測地線のエネルギー汎関数およびディラック作用汎関数の摂動で与えられることに着目してホモロジーの計算を行う。より詳しくは、ヒルベルトバンドルの定空間であるループ空間が、エネルギー汎関数（の摂動）のモース指数でフィルター付けられることを用いて、モースホモロジーに収束するようなルレイ・セール型のスペクトル系列の構成を行う。各ファイバーのモースホモロジーは(1)で研究した単独のディラック方程式のモースホモロジーで与えられるので、スペクトル系列は第2ページ目で退化する。これからルレイ・セールのスペクトル系列を用いるとディラック・測地線に対するモースホモロジーの計算が可能になる。

(3) ディラック・調和写像に関しては、写像が値を多様体にとり、かつ定義多様体の次元が2以上であることから、調和写像の場合と同様に一般的にモース理論を展開することは非常に困難である。従って本研究では最も単純な場合である平坦トーラスに値をとる場合のみ考察する。この場合、配位空間に特別なパラメータ付けを与えることができ、多様体の非線形性に起因する配位空間の非線形性を、トーラスの非線形性にまで落とすことが可能になる。即ち、非線形性を有限次元の問題に落とせる。この簡約化を用いることで、変分法の臨界点理論の拡張をこの問題に対してまで適用できるように拡張し、臨界点のカップ長評価を行うことで、ディラック測地線の存在証明と解の個数の評価を行う。

#### 4. 研究成果

本研究期間で得た非線形ディラック型方程式のモース理論に関する研究成果は以下のとおりである。

(1) ディラック型作用素のベキ型の非線形項による摂動として得られる非線形ディラック方程式に対しては、モースホモロジーの構成と計算を実行した。得られた結果から、ホモロジーは非線形項の無限遠方での増大度だけに依存し、非線形項に関するホモトピー不変量を定めることを明らかにした。具体的には、非線形項の無限遠方でのベキのオーダーが2より大きい場合の優2次型か、あるいは2以下の場合の漸近2次型かでモースホモロジーの性質が本質的に異なることを発見した。優2次型の場合は、無限遠方における増大度のオーダーだけでホモロジーはきまるとは、漸近2次型の時のホモロジーの構造はより複雑で、一般には非線形項の2次のオーダー以降の摂動項の振る舞いにも依存することを証明した。この場合のホモロジーの非線形項に対する依存度は、非線形項が無限遠方で非共鳴的か共鳴的かで異なり、非共鳴的な場合は、ホモロジーは無限遠方における2次式のホモトピー類だけで決まり、それはスピノルの空間の特異ホモロジーに同型になることを示した。一方、漸近2次型でかつ共鳴的な場合は、ホモロジーは、摂動項の無限遠方における退化空間への制限の(有限次元)モースホモロジーと同型になることを示し、これから退化空間における摂動項の振る舞いに応じてそのホモロジー、あるいはコホモロジーが決定されることを示した。また、この場合に得られたホモロジーとコホモロジーは互いにポアンカレ双対で結ばれていることを示した。これらのホモロジーの計算結果から、優2次型、漸近2次型の非線形項を持つディラック方程式に対して解の存在定理と解の個数の評価を与えた。偏微分方程式に付随する強不定値型変分問題に対するモースホモロジーの構成および計算結果は今までほとんどなく、古典的に知られていた存在定理や存在条件にモースホモロジーを用いて新しい意味付けを与えることができた。特に、漸近2次型の非線形項の場合には、古典的に知られていた Landsman-lazer の2つの存在条件に、モースホモロジーとコホモロジーのポアンカレ双対が対応するということを発見した。ベキ型の非線形項を持つ偏微分方程式は古くから研究されているが、ここで与えたモースホモロジー的アプローチはこれらの古典的な対象にも新しい観点を提供したと考えている。実際、ここで与えた一連のディラック方程式のモース理論の研究を契機に、近年、世界中で多様体上の非線形ディラック方程式の研究が活発になりつつある。

(2) ディラック・測地線に関しては、モースホモロジーの構成を、スピノルに関する非線形項がベキのオーダーで3次以上の場合に一般的に構成した。また、長さスペクトルが有限であるような多様体に対してはそのホモロジーに収束するようなルレイ・セール型のスペクトル系列を構成し、ホモロジーの計算を行った。この計算結果を用いて、このクラスの多様体に対してディラック・測地線の存在定理を証明した。ディラック・測地線のモース理論は、無限次元ヒルベルトバンドル上のモース理論であり、底空間およびファイバーともに無限次元である。底空間が有限次元の場合は、ハミルトン系の作用汎関数に対するモース理論において、類似の構成が行われていたが、定空間が無限次元の場合には無かった。底空間が無限次元の場合は、底空間の非コンパクト性から新たな困難が生じるが、そのような場合にも、モースホモロジーに収束するルレイ・セール型のスペクトル系列を構成したことは意義があると考えている。ディラック・測地線の研究はまだ新しく、世界的見ても、研究者も研究結果も多くはないが、今後のこの方面の研究の方向性の一つを示せたと考える。更に、スピノルに関して3次以下の非線形項を持つ場合のモースホモロジーの構成、長さスペクトルの有限性を仮定しない一般的な多様体に対するホモロジーの計算、およびホモロジーの代数的な構造の解明など、多くの問題が未解決のまま残っており、

今後も研究を継続して行う予定である。

(3) ディラック・調和写像に関しては、平坦トーラスに値をとる場合に存在問題を研究した。この場合、解空間の大域的構造の定性的な性質はスピノルに関する非線形項の無限遠方での増大度で異なることを発見した。具体的には、非線形項が無限遠方で2次式より早く増大する優2次型の場合、解空間は一般には非コンパクトであるのに対して、非線形項が2次型かつ2次式の部分が非退化の場合はコンパクトになることを示した。また、優2次型、2次型それぞれの場合に、各ホモトピー類において解が少なくともトーラスの次元プラス1個存在することを示した。これは、全く別の問題である、トーラス上のハミルトン系の周期解の個数に関する有名なアーノルド予想の類似がディラック・測地線に対しても成り立つことを示している。これから、一般の多様体に値をとるディラック・調和写像に対しても同様の存在定理が成り立つことが期待でき、今後のディラック・調和写像の存在問題の研究に対する指針を与えるものと考えている。実際、一連のディラック・測地線およびディラック・調和写像の結果に触発されたと思われる研究がここ数年の間で海外の異なるグループから次々に発表されてきている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

|   |                           |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名<br>Isobe Takeshi   | 4. 巻<br>19                |
| 2. 論文標題<br>Morse-Floer theory for superquadratic Dirac equations, I: relative Morse indices and compactness | 5. 発行年<br>2017年           |
| 3. 雑誌名<br>Journal of fixed point theory and applications  | 6. 最初と最後の頁<br>1315 ~ 1363 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s11784-016-0391-z   | 査読の有無<br>有                |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-                 |

|  |                           |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名<br>Isobe Takeshi  | 4. 巻<br>19                |
| 2. 論文標題<br>Morse-Floer theory for superquadratic Dirac equations, II: construction and computation of Morse-Floer homology | 5. 発行年<br>2017年           |
| 3. 雑誌名<br>Journal of fixed point theory and applications   | 6. 最初と最後の頁<br>1365 ~ 1425 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s11784-016-0392-y  | 査読の有無<br>有                |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-                 |

|  |                     |
|--|---------------------|
| 1. 著者名<br>Takeshi, Isobe   | 4. 巻<br>15-1        |
| 2. 論文標題<br>Spinorial Yamabe type equations on $S^3$ via Conley Index | 5. 発行年<br>2015年     |
| 3. 雑誌名<br>Advanced Nonlinear Studies                                 | 6. 最初と最後の頁<br>39-60 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1515/ans-2015-0103                    | 査読の有無<br>有          |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                               | 国際共著<br>-           |

|   |                 |
|---|-----------------|
| 1. 著者名<br>Isobe Takeshi   | 4. 巻<br>58      |
| 2. 論文標題<br>On the multiple existence of superquadratic Dirac-harmonic maps into flat tori | 5. 発行年<br>2019年 |
| 3. 雑誌名<br>Calculus of Variations and Partial Differential Equations                       | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s00526-019-1578-0                                     | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-       |

|  |                 |
|--|-----------------|
| 1. 著者名<br>Isobe Takeshi  | 4. 巻<br>-       |
| 2. 論文標題<br>Morse homology for asymptotically linear Dirac equations on compact manifolds | 5. 発行年<br>2020年 |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Differential Equations  | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.jde.2020.04.007                                    | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-       |

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件)

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>磯部 健志                        |
| 2. 発表標題<br>非線形ディラック方程式に対するモース・フレアーホモロジー |
| 3. 学会等名<br>微分方程式の総合的研究 (招待講演)           |
| 4. 発表年<br>2017年                         |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>磯部健志  |
| 2. 発表標題<br>Perturbed Dirac-harmonic maps into flat tori: existence and multiplicity. |
| 3. 学会等名<br>楕円型・放物型方程式研究集会 (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2019年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

|   |
|---|
| <a href="https://researchmap.jp/7000019461">https://researchmap.jp/7000019461</a> |
|---|

6. 研究組織

|  | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|