

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：13201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04949

研究課題名(和文) 対数型ソボレフの不等式の理論の深化と応用

研究課題名(英文) Deepening and application of a theory for the logarithmic Sobolev inequality

研究代表者

藤田 安啓 (Fujita, Yasuhiro)

富山大学・大学院理工学研究部(理学)・教授

研究者番号：10209067

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：今回の研究では当初予定していた重要な目標を達成できた。それは、指数  $p = \infty$  のときの対数型 Sobolev の不等式を用いて、関数の gradient の sup-norm の下からの評価を与えることである。この評価は、Cauchy 問題の解の gradient の sup-norm の減衰率の最適性を示すのに応用された。この結果は、然るべき雑誌に既に論文として発行された。また、研究開始時には論文が発行間近であった、指数  $p > 1$  に対する対数型 Sobolev の不等式の完全な証明についても研究会を通じて研究者たちに広く知ってもらうことができた。これらにより、研究は満足の行く形で達成できた。

研究成果の概要(英文)：I was able to achieve an important aim that I planned in this study at first. It is to provide a lower estimate of the sup-norm of the gradient of a function by using the logarithmic Sobolev inequality with index  $p$  which is equal to infinity. This estimate is applied to show the optimality of the decay rate of the sup-norm of the gradients to solutions of several Cauchy problems. This result has been published in an appropriate mathematical journal. On the other hand, through workshops, I let many researchers know widely about my complete proof of the logarithmic Sobolev inequality with index  $p$  which is greater than 1. The paper of this proof was published in the beginning of this study. In these senses, the result of this study was able to be accomplished in a satisfactory form.

研究分野：数学基礎解析

キーワード：対数型 Sobolev の不等式 Hamilton-Jacobi方程式 下からの評価 gradient Cauchy 問題 完全な証明

## 1. 研究開始当初の背景

$L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式の証明は  $p=2$  のとき F.Weissler により、 $p=1$  のとき M.Ledoux により、 $1 < p < n$  のとき M. Del Pino と J.Dolbeault により示された。一般の  $p > 1$  のときは I.Gentil により証明が与えられたが、その証明の中には gap が存在していた。研究開始の数年前より、この gap を埋めたいと念願していた。この gap を埋める証明は、本研究開始前に投稿した論文により、研究開始年である 2015 年の時点で論文として発行されていたが、研究会などを通して関連する研究者などへの周知や広報は研究開始時点では何もなされていなかった。

一方、 $p$  のときの  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式については、本研究代表者により 2011 年時点でその証明と簡単な応用が与えられていた。しかし、この場合の偏微分方程式への明確な応用については何も分かっていなかった。一般の  $p > 1$  に対する  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式は偏微分方程式との関連で発展してきた研究対象なので、 $p$  のときの  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式についても偏微分方程式への応用を本研究の開始 1 年前ぐらいから模索していた。

## 2. 研究の目的

上記「研究開始当初の背景」に書いた I.Gentil 氏による  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式の証明の中の gap を完全に埋める証明を発行すると同時に、研究会などを通して関連する研究者などへの周知や広報をすることが一つの大きな目標であった。もう一つの目標として、 $p$  のときの  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式を偏微分方程式に対する Cauchy 問題に適用して、解の gradient の  $L^1$  ノルムの下からの評価を導き、同ノルムの上からの評価と合わせ、同ノルムの減衰率の最適な order を求めることがあった。この目標についても、結果が得られ次第、研究会などを通して関連する研究者などへの周知や広報をすることもこの目標の重要な要素の 1 つであった。

## 3. 研究の方法

上記「研究の目的」の達成のために、まずは必要な図書類を毎年購入した。これらの本を使って勉強するとともに、国内外の関連する研究者たちを訪問して意見交換を通じた勉強を繰り返した。この中には、証明のなかで gap があった I.Gentil 氏も含まれている。彼は親切に対応してくれたばかりでなく、論文の投稿先のアドバイスまでしてくれた。2015 年には、I.Gentil 氏を富山に招待することもできて、その交流は今も続いている。

また、 $p > 1$  のときの  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式の証明は Hamilton-Jacobi 方程式の解を使って与えられるので、同分野の国内外の研究者を訪ねた。国内では、連携研究者の石井仁司氏や、石井克幸氏、国外では A.Siconolfi 氏などである。彼らとの交流は、Hamilton-Jacobi 方程式への理解を深めるだけでなく、Hamilton-Jacobi 方程式をはじめとする偏微分方程式一般への理解を深めるのに大いに役に立った。

さらに、得られた結果を学会や講演会で発表して、研究への理解を深めてもらうとともに研究の広報に務めた。

## 4. 研究成果

以下の「雑誌論文、学会発表」欄にも記述してあるが、この期間に上記「研究の目的」で掲げた目的に関連した論文を 2 編発行した。また、関連する学会発表を 7 件行った。上記 2 編の論文以外では、2017 年当時の修士 2 年の院生と共著で高木函数の一般化に関連した論文も発行している。

上記目標に関連した 2 編の論文の 1 つでは、I.Gentil 氏による  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式の証明の中の gap を完全に埋める証明を与え、それを発行していくつかの研究会で講演することを通して関連する研究者などへの周知や広報をすることができた。これは当初の目的を完全に果たすことになるものである。

上記 2 編の論文のもう 1 つでは、 $p$  のときに得られていた  $L^p$  型の対数型 Sobolev の不等式を Hamilton-Jacobi 方程式と一様放物型方程式に対する Cauchy 問題に適用して、解の gradient の  $L^1$  ノルムの下からの評価を与えた。「研究の目的」でも書いたが、さらに同ノルムの上からの評価と合わせ、同ノルムの減衰率の最適な order を求めることが可能になり、それについても言及している。これもいくつかの研究会で講演することを通して関連する研究者などへの周知や広報をすることができた。このことも、当初の目的を完全に果たすことになるものである。

このように、研究の目的を完全に達成することができて、本研究課題は満足のいく形で完了することができたと言える。

ただし、 $\Delta$ -Laplacian による角錐型函数の特徴づけや Borell-Brascamp-Lieb の不等式の解析などには時間がなく研究できず、今後の課題としていきたい。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

藤田 安啓, A lower bound of  $L^p$ -norm of gradients for Cauchy problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 458 (2018), 910-924.

藤田 安啓, 齋藤 祐助, On the sets of maximum points for generalized Takagi functions, *Toyama Mathematical Journal* 39 (2017), 87-94.

藤田 安啓, A supplementary proof of  $L^p$ -logarithmic Sobolev inequality, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* 24 (2015), 119-132.

I. Birindelli, G. Galise, 石井 仁司, A family of degenerate elliptic operators: maximum principle and its consequences, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 35 (2018), 417-441.

石井 克幸, M. Kimura, Convergence of a threshold-type algorithm using the signed distance function, *Interfaces Free Bound.* 18 (2016), 479-522.

〔学会発表〕(計7件)

藤田 安啓, 病的函数を初期値とする Hamilton-Jacobi flow の幾何学的性質, 九州関数方程式セミナー, 2017.10.20, 福岡大学六本松セミナーハウス

藤田 安啓, On a geometrical property of Hamilton-Jacobi flow starting from some pathological function, *Nonlinear PDE for Future Applications - Optimal Control and PDE* - 2017.07.20, 東北大学理学研究科

藤田 安啓, On Hamilton-Jacobi equation with initial data of the Takagi function,

北大 PDE セミナー, 2016.10.28, 北海道大学

藤田 安啓, 一様放物型方程式の解の gradient の下からの評価について, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関数方程式分科会, 2016.09.16, 関西大学

藤田 安啓, On a Gagliardo-Nirenberg type inequality for log-concave functions, RIMS 研究集会「偏微分方程式の漸近問題と粘性解」, 2015.12.04, 京都大学・数理解析研究所

藤田 安啓, Application of a logarithmic Sobolev inequality to gradient bounds of solutions of parabolic equations, 研究集会「確率論と幾何学」, 2105.11.10, 東京工業大学

藤田 安啓, On a Sobolev-type inequality for log-concave functions via a Hamilton-Jacobi equation, 早稲田大学における講演会, 2015.08.03, 早稲田大学教育・総合科学学術院

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.sci.u-toyama.ac.jp/~yfujita/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤田 安啓 (Fujita, Yasuhiro)  
富山大学・理工学研究部・教授  
研究者番号: 10209067

(2)研究分担者  
なし

(3)連携研究者

石井 仁司 (Ishii, Hitoshi)  
早稲田大学・教育・総合学術院  
研究者番号： 70102887

石井 克幸 (Ishii Katsuyuki)  
神戸大学・海事科学部・教授  
研究者番号： 40232227