

令和元年5月26日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04954

研究課題名(和文)非圧縮粘性流と物体の運動の相互作用の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of fluid-structure interaction

研究代表者

菱田 俊明 (Hishida, Toshiaki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：60257243

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：非圧縮粘性流体の中を運動する物体と流体の運動の相互作用の解析を行った。3次元空間でself-propelled運動をする物体と流体の相互作用を考察し、物体の運動速度を小さく与えるとき、それを達成するように境界上で制御可能であることを示した。また、この解の安定性解析も念頭に、時間依存運動する物体周りでの線型化方程式の生成する発展作用素の長時間挙動を求めた。さらに、Finnのstarting問題に対しても新しい知見を導いた。2次元外部問題に対しては、物体が一定角速度で回転する場合に、定常流の空間無限遠での漸近展開を求めた。また、2次元並進物体の周りでのOseen半群の減衰評価を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非圧縮粘性流と物体の運動の相互作用の問題、また物体の運動がその周りの流れに与える効果の解析は、未解明な事柄が多く、古くて新しい問題である。問題意識は数学の中で閉じておらず、流体物理学や流体力学においても重要な位置を占めるが、本研究によって、数学的な基礎をある段階まで与えることができたことは意義深い。特に、上記の成果の一つである境界での制御可能性について、制御関数は例えば水中を泳ぐ微生物の繊毛による駆動を表し、与えられた運動を達成するために繊毛をどのように使えばよいかに答えている。抵抗最小な最適制御解の安定性を調べるには、本研究で得られた発展作用素の時間減衰評価の応用が有効であると期待される。

研究成果の概要(英文)：I analyzed a problem arising from fluid-structure interaction and some related issues, where the fluid is incompressible as well as viscous, while the structure is assumed to be a rigid body. In 3D case the boundary controllability of a self-propelled motion of a body, whose motion is prescribed but not too large, was proved. Toward analysis of this solution, I deduced a large time behavior of the evolution operator generated by a linearized system around time-dependent rigid motions. A new result on the starting problem in 3D proposed by Finn was also provided. In 2D case an asymptotic representation of steady flows at spatial infinity around a rotating body was discovered. I also deduced a temporal decay estimate of the Oseen semigroup past a translating body in 2D.

研究分野：函数方程式論

キーワード：非圧縮粘性流 Navier-Stokes方程式 発展作用素 Oseen流 外部問題 漸近展開 制御 長時間挙動

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

剛体の障害物の周りの流れの構造、また剛体の運動が流れに与える効果、双方の運動の相互作用は流体力学における基本的な問題である。流体の運動はその障害物の外部領域におけるナビエ-ストークス方程式の境界値問題として定式化される。剛体の運動は並進と回転に分解されるが、特に一様な速度で並進のみする問題に対しては1960年代前半のFinnによる一連の優れた研究があり、並進物体の航跡の内外での流れの異方的な減衰構造を数学的に捉えた。一方、一定角速度で回転する場合の研究は、1990年代となってBorchersおよび研究代表者により開始され、今世紀にはGaldiのグループをはじめ多くの研究者が参入し、回転が引き起こす双曲性の困難を克服する解析、そして一方で回転による振動効果を捉える解析が進展し、並進と回転の両方を考慮した剛体の運動とその周りの流れの相互作用を解析する機が熟してきた。しかしながら、剛体の運動が時間により変動する場合の非定常基本解の長時間挙動は未解明であった。また、空間3次元に比べ、空間2次元での剛体周りの平面流の解析は定常流、非定常流ともに種々の理由によって本質的に難しく、その知見は限定的であった。

### 2. 研究の目的

2次元あるいは3次元空間にひろがる非圧縮粘性流体の中に剛体の障害物があるとし、物体の運動状態に応じた流れの空間無限遠での減衰構造や時間無限大での漸近挙動等、流れの性質から物体の運動効果をできる限り明示的に取り出すことを通して、双方の運動の関係を数学的に解明し、関連する流体力学の諸問題の数学的な基礎付けを与える。また、物体の運動をその境界上で制御する問題、その解も含めて定常流や時間周期流の安定性およびattainability、さらにそれらの主流に加えた擾乱の時間減衰率も研究目的である。

### 3. 研究の方法

本研究の体制は、研究代表者ひとりによって行われる。ただし、研究内容の一部には適宜、国内外の共同研究者が加わる場合がある。また、京都大学数理解析研究所での研究集会「非圧縮粘性流体の数理解析」(毎年晩秋に開催)により、国内外の若手研究者の参入も図る。

長時間挙動の研究においては、dualityやエネルギー関係式も援用した発展作用素の時間減衰評価、Fourier分解法、resolvent問題のスペクトル解析を用いる。空間減衰構造の研究においては、基本解の詳細な漸近展開が鍵となる。物体の運動と流体の運動の相互作用の解析においては、共役線型問題を用いて構成した6次元の制御空間が重要な役割を果たす。

当科研究費の使用の観点では、研究計画を遂行するために最も肝要なことは、当分野の優れた研究者との活発な交流である。国内外の優れた研究者が所属する研究機関を訪問して有益な討論を行い、また学会、研究集会、国際会議において研究成果を発表する。当分野をリードする世界中の研究者と討論することによって、本研究の格段の進展が見込まれる。

### 4. 研究成果

(1) 空間3次元の外部領域において、剛体の障害物が時間に依存した運動を行う問題を考察した。通常、その解析は座標系を運動する物体に固定することにより一定外部領域における問題に変換して行われる。変換後の剛体の重心の並進速度および重心周りの回転角速度が時間に依存する場合に、線型化方程式の初期値問題の解の長時間挙動を求めることが主題である。その解は関数解析の術語を用いれば発展作用素により実現される。q乗可積分空間における発展作用素の生成は2014年にHansel-Rhandiによって証明された。本研究ではこの発展作用素のゼロ階のLq-Lr型減衰評価を示した。剛体の並進速度および回転角速度の時間依存のしかたは、有界性およびヘルダー連続性だけでなく、したがって自励系を特別な場合として含む。一般に、自励系に対する作用素半群の場合と異なり、非自励系の発展作用素の長時間挙動については拠り所とする表現式や一般論がなく、問題ごとの特徴を捉えた解析を要する。本研究においても、全空間での同じ方程式の解の減衰評価とエネルギー関係式だけを手がかりに、cutoffの方法やdualityによる議論を駆使して証明した。証明方法と成果じたいの両方が非常に新しく、Math. Ann. (2018)において出版されている。また、この論文では、ゼロ階の減衰評価とエネルギー関係式だけによって1階微分を含む非線型項を扱う方法、したがってNavier-Stokes初期値問題を時間大域的に解く方法も併せて提示した。

(2) 上記の(1)の問題設定において、剛体が特に並進運動のみを行う場合、より詳しくは初期時刻で静止していた障害物が次第に加速して有限時間後に一様な並進速度に至る問題を考察した。このとき、その最終的な一様速度(ただしこれが小さいとする)から決まる定常流の存在が知られており、その解は航跡を伴う異方的な減衰構造をもつ。この構造が物体をよぎる現実の流を良く記述していることから、FinnによってPhysically Reasonable Solution(以下でPR解と略記)と名づけられた。Finnは1965年に出た著作の一つにおいて、上記の設定のもと、非定常解の時間発展の漸近挙動を問い、時間無限大でPR解に近づく予想した。実際に近づくときに、PR解はattainableであると呼ばれる。この問題は、Finnのstarting問題として知られている。PR解はエネルギー有限でないために、解決には本質的にLq理論を要する。実際、オセン半群のLq-Lr型減衰評価がKobayashi-Shibataによって確立されたことを受けて、1997年にGaldi-Heywood-Shibataにより、初期時刻で流体が静止している場合に解決された。本研

究では、この考察をさらに一歩進め、初期時刻での流体速度ベクトルが3乗可積分であってかつ大きい場合であっても、PR解が attainable であることを証明した。Maremonti 氏(Caserta)との共同研究によるこの成果は、J. Math. Fluid Mech. (2018) から出版されている。証明の鍵は、大きい初期値を取る適切な補助関数と強エネルギー不等式をみたとす Leray-Hopf 弱解の和として PR 解からの摂動を構成することである。

(3) 3次元全空間において、時間に依存した Navier-Stokes 流の安定性とそれに加えた擾乱の減衰率を考察した。時間に依存した流れとしては、時間周期解、自己相似解、初期値問題の大域解を念頭においている。これらの主流はある臨界空間で小さいとするが、そのほかの余計な条件は課さない。また、エネルギー安定性を考えることで、初期擾乱の小ささは不要となり、大域安定性を議論できる。この大域安定性については既に Karch-Pilarczyk-Schonbek により得られていたが、本研究では擾乱の時間減衰率の構造を同じ初期値に対する線型化方程式の解の時間減衰率との関係の中で明らかにした。Schonbek 氏(Santa Cruz)との共同研究によるこの成果は、Indiana Univ. Math. J. (2016) から出版されている。同様な意味での減衰構造について、自明解のまわりでの宮川鉄朗氏による深い研究があるが、それを主流が非自明解の場合におし進めたものである。証明は、線型化方程式の発展作用素の減衰評価と Fourier 分解法を組み合わせて行われる。

(4) 3次元空間内の self-propelled 条件をみたす物体の運動とその周りでの流体の運動の相互作用を考察した。ただし、物体に固定した座標系で見て時間定常的な運動を考える。定常的な self-propelled 条件は、流体が物体におよぼす力とトルクがいずれも消えていることを表している。本研究では、剛体の並進速度と回転角速度を小さく与えるときに、それを達成する境界上での制御関数を求めた。より詳しく言えば、物理的に有意な2通りの制御方法が可能であることを示した。ひとつは境界上で小さい台をもつ制御関数による制御であり、もうひとつは境界上の各点で tangential な制御関数による制御である。このような問題は、物体が軸対称でその軸に沿う並進のみを考えると Galdi によって考察されていたが、一般的な剛体の運動であっても境界上で制御可能であることを示したのは、本研究が初めてである。この成果は Silvestre 氏(Lisbon)、Takahashi 氏(Nancy)との共同によるもので、Ann. I.H. Poincaré -AN (2017)から出版されている。解析の鍵は、与えられた並進速度を回転角速度に依存する共役線型問題を用いた制御空間の設定である。また、self-propelled 条件によって流れの無限遠での減衰率が良くなる機構も明らかにした。

(5) この(5)を含めて、以下は2次元平面流の研究となる。本研究のように論点が解の漸近挙動であるときは、時空いずれの変数に関する漸近挙動であっても、空間3次元より2次元のほうが難しいことは周知である。このことは、解の正則性が論点であるときに高次元のほうが難しいのと対照的である。とりわけ2次元外部定常問題の難しさは格別で、その主たる困難はストークスの逆理によって線型化解析が機能しないことである。ストークスの逆理は、ストークス基本解が無遠で対数増大するために一般的なストークス流の無限遠での挙動を制御できないことに起因する。物体が並進するとき、その逆理が解消されることは、そのときの線型化方程式のオセン基本解の減衰構造で説明できる。本研究では、物体が回転する場合であっても、その振動効果によりストークスの逆理が解消されることを明らかにし、また線型流の無限遠での漸近展開の主要項(leading term)が回転の様相を表す漸近形をもつことを示した。さらに、その漸近形の係数は流体が物体におよぼすトルクで与えられる。Springer Proc. Math. Statistics (2016)において、その成果が出版されている。この事実は物理サイドの文献でも見あたらず、本研究による基本解の減衰構造の詳細な解析を通して初めて分かったことである。その後、前川泰則氏のグループは、この線型理論を洗練して非線型問題に応用し、一定角速度で回転する障害物の周りでの Navier-Stokes 定常流の構成とその漸近挙動の導出に成功した。それを受けて、研究代表者は Kyed 氏(Darmstadt)との共同研究により、スケール臨界減衰する小さな Navier-Stokes 流が与えられたときに、その漸近展開の主要項を求めた。この成果は査読中のため以下の業績表にないが、arXiv:1809.03164 で公開されている。この論文は、障害物の回転によるストークスの逆理解消の別証明も含んでいる。

(6) 2次元平面の中を物体が一様な速度で並進する場合のオセン半群の長時間挙動を考察した。特に Lq-Lr 型の減衰評価は空間3次元以上の場合にはよく知られていたが、2次元の場合は残されていた。2次元特有の困難は、対応するレゾルベント問題の解のレゾルベント parameter に関する対数特異性である。本研究では、まず全平面でのレゾルベントの基本解の特殊関数による新しい表示を与えた。この表示に基づいて基本解の漸近挙動を詳細に調べた上で、外部領域におけるレゾルベントのパラメトリクスを構成し、その漸近挙動を通してオセン半群の減衰評価を導いた。この成果は、J. Math. Soc. Japan (2016) から出版されている。ただし、得られた評価の係数について改良の余地があったが、その後、前川泰則氏が望ましい形に評価を修正の上で更に研究を進めて Finn-Smith による定常流の安定性に至ったことは喜ばしい。

(7) 最後に、空間2次元であって流れの占める領域が上下半平面とそれらを連結する通路から

なる問題を考察した。このような領域は aperture 領域と呼ばれ、線型であっても通常の境界条件のもとでは解が一意に定まらず、通路での流量を指定することで一意解を得られることが特徴的である。久保隆徹氏との共同による本研究では、定常解や時間周期解が安定となるための判定法を与えた。この成果は、Gakuto International Series Math. Sci. Appl. (2015) において出版されている。スケール臨界減衰する小さい主流に対してその判定法は適用可能で、応用は広い。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 9 件)

Toshiaki Hishida, Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, *Math. Ann.* 372 (2018), 915–949, 査読あり. DOI 10.1007/s00208-018-1649-0

Toshiaki Hishida, Paolo Maremonti, Navier-Stokes flow past a rigid body: attainability of steady solutions as limits of unsteady weak solutions, starting and landing cases, *J. Math. Fluid Mech.* 20 (2018), 771–800, 査読あり. DOI 10.1007/s00021-017-0344-3

Toshiaki Hishida, Stationary Navier-Stokes flow in exterior domains and Landau solutions, *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*, 299–339, Springer, 2018, 査読あり. DOI 10.1007/978-3-319-10151-4\_6-1

Toshiaki Hishida, Ana Silvestre, Takeo Takahashi, A boundary control problem for the steady self-propelled motion of a rigid body in a Navier-Stokes fluid, *Ann. I.H. Poincaré --AN* 34 (2017), 1507–1541, 査読あり. DOI 10.1016/j.anihpc.2016.11.003

Toshiaki Hishida, Asymptotic structure of steady Stokes flow around a rotating obstacle in two dimensions, *Springer Proc. Math. Statistics* 183 (2016), 95–137, 査読あり. DOI 10.1007/978-4-431-56457-7\_5

Toshiaki Hishida, Maria Schonbek, Stability of time-dependent Navier-Stokes flow and algebraic energy decay, *Indiana Univ. Math. J.* 65 (2016), 1307–1346, 査読あり.

Toshiaki Hishida, Lq-Lr estimate of the Oseen flow in plane exterior domains, *J. Math. Soc. Japan* 68 (2016), 295–346, 査読あり. DOI 10.2969/jmsj/06810295

Toshiaki Hishida, Decay estimates of the Oseen flow in two-dimensional exterior domains, *Gakuto International Series Math. Sci. Appl.* 37 (2015), 63–87, 査読あり.

Toshiaki Hishida, Takayuki Kubo, On the asymptotic stability for small initial disturbance of Navier-Stokes flow in a two-dimensional aperture domain, *Gakuto International Series Math. Sci. Appl.* 37 (2015), 183–192, 査読あり.

[学会発表](計 26 件)

菱田俊明, Decay estimates of gradient of the evolution operator arising from time-dependent rigid motions in exterior domains, *Maximal Regularity and Nonlinear PDE*, 京都大学 RIMS, 2019 年 3 月 26 日.

菱田俊明, Attainability of steady flows as limits of unsteady Navier-Stokes flows around a rigid body rotating from rest, *International Workshop on the Multi-Phase Flow*, 早稲田大学, 2018 年 11 月 29 日.

菱田俊明, Asymptotic structure of steady Navier-Stokes flow around a rotating obstacle in 2D, *Nonlinear Evolutionary PDEs and their Equilibrium States II – In honor of the retirement of Professor Yoshio Yamada --*, 早稲田大学, 2018 年 9 月 15 日.

菱田俊明, Asymptotic structure of steady navier-Stokes flow around a rotating obstacle in 2D, *調和解析学と Navier-Stokes 方程式*, 早稲田大学, 2018 年 9 月 8 日.

菱田俊明, Lq-Lr estimate of the evolution operator arising from fluid motion past a rotating obstacle, with applications to the Navier-Stokes initial value problem, *Mathematical Fluid Mechanics and Related Topics*, 東京工業大学, 2018 年 9 月 5 日.

菱田俊明, Lq-Lr estimate of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, *流体と気体の数学解析*, 京都大学 RIMS, 2018 年 7 月 5 日.

菱田俊明, Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, *Gemeinsame Jahrestagung GDMV 2018*, Paderborn 大学(ドイツ), 2018 年 3 月 7 日.

菱田俊明, Asymptotic structure of steady flow around a two-dimensional rotating body, *非圧縮性粘性流体の数理解析*, 京都大学 RIMS, 2017 年 12 月 5 日.

菱田俊明, Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, *International Workshop on the Multi-Phase flow*, 早稲田大学, 2017 年 11 月 28 --29 日.

菱田俊明, Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, *日本数学会秋季総合分*

科会函数方程式論分科会, 山形大学, 2017年9月14日.

菱田俊明, Navier-Stokes flow past a rigid body: attainability of steady solutions as limits of unsteady weak solutions, 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 山形大学, 2017年9月14日.

菱田俊明, Lq-Lr estimate of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, The Last 60 Years of Mathematical Fluid Mechanics: Longstanding Problems and New perspectives, Vilnius 大学 (リトアニア), 2017年8月24日.

菱田俊明, Lq-Lr estimates of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, Workshop on Vorticity, Rotation and Symmetry IV: Complexity, Regularity and Singularities, CIRM (Luminy, フランス), 2017年5月11日.

菱田俊明, Lq-Lr decay estimate of the evolution operator generated by the non-autonomous Oseen operator arising from fluid motion past a rotating obstacle, with applications to the Navier-Stokes initial value problem in 3D exterior domains, The 13<sup>th</sup> German-Japanese International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Darmstadt 工科大学 (ドイツ), 2016年12月2日.

菱田俊明, Navier-Stokes flow past a rigid body: attainability of steady solutions as the limit of unsteady weak solutions, starting and landing cases, International Workshop on the Multi-Phase flow, 早稲田大学, 2016年11月8日.

菱田俊明, 粘性流体の中の剛体の self-propelled motion の境界上での制御, 日本数学会春季年会函数方程式論分科会, 筑波大学, 2016年3月18日.

菱田俊明, Asymptotic structure of steady Stokes flow around a rotating obstacle in two dimensions, Infinite Dimensional Systems in Fluid Mechanics and Biology, Antilles 大学 (Pointe-a-Pitre, フランス), 2015年12月8日.

菱田俊明, Asymptotic structure of steady Stokes flow around a rotating obstacle in 2D, Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues, Vilnius 大学 (リトアニア), 2015年6月3日.

## 6 . 研究組織

- (1)研究分担者   なし
- (2)研究協力者   なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。