2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月 ２４ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４９５６
研究課題名（和文）複素位相エネルギー評価法の新展開とその応用

研究課題名（英文）Development in energy methods with complex phase and their applications

研究代表者
大鍛治　隆司（OKAJI, Takashi）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：２０１６０４２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：　複素位相法エネルギー法において許容される重み関数のクラスを広げる試みの一つとして、研究代表者大鍛治隆司は、Hubert Kalf氏(ミュンヘン大学)・ 山田修宣氏(立命館大学)との共同研究において、ベッセル関数族に関連するある重み付き積分の次数によらない一様評価を得た。これを用いて、シュレーディンガー作用素などの偏微分作用素の解の平滑化効果や全空間で定義された関数を球面へのトレース作用素の評価式に現れる最良定数の具体的評価を与えることが可能となる。特に一般ｎ次元(n≧2)におけるディラック作用素のレゾルベントに関する重み付き不等式であるスペクトルパラメーターによらない一様極限吸収原理を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
数理物理学において重要なベッセル関数族のある重み付き積分量の次数によらない一様評価を得た。この証明は非常に初等的であり、また許容される重み関数のクラスも非常に簡単な条件で規定することが出来る。その応用として、種々の偏微分方程式のスペクトル問題をはじめとする解のいろいろな構造を明らかにした。特に、相対論的粒子の運動を記述するディラック作用素のレゾルベントに関する重み付き評価式を考察し、その結果、スペクトルパラメーターに関して閾値を込めた一様評価式を得た。その際粒子の質量が零の場合と正の場合とでは結論が異なることも明らかにすることが出来た。

研究成果の概要（英文）：We obtained uniform weighted integral estimates for Bessel functions with respect to their orders. Our admissible class of weight functions is large enough and is defined explicitly by very simple conditions. These fundamental inequalities play an important role in energy methods with complex phase. As an application, we have established uniform limiting absorption principle for Dirac operators in general dimensions. This is a joint work with H.Kaif and O. Yamada.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ベッセル関数　トレース定理　極限吸収原理　ディラック作用素

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

近代偏微分方程式論においては、1960 年代に関数解析学的手法を用いて、楕円型方程式、放物型方程式、双曲型方程式、シュレーディンガー方程式などの線形方程式に対する境界値問題･初期値問題等の基本的諸問題に対する解の存在定理が確立された。次いで 1970 年代になると、詳細なフーリエ解析的手法(擬微分作用素、超局所解析等)を用いて解の特異性の伝播などに代表される解の構造についての定性的性質が明らかにされ始めた。

これに対して、1980 年代以降になり、偏微分方程式に対する解の定量的評価についても、Strichartz 不等式等の解に対する Lp-Lq 不等式や大きなパラメーターを持つ重み関数を用いる Carleman 不等式等の分野に見られるように盛んに研究され現在も発展しつつある。その理由の一つは、このような解の定量的評価が各種非線形発展方程式の解の大域的存在に関する研究や解の一意接続性や逆問題に関する研究に重要な役割を果たし、この分野の飛躍的な進展に大きな原動力となっているからである。したがって、これらの定量的評価式をあらためて複素位相エネルギー法の観点から総合的に捉え直し、スペクトル問題をはじめとするいろいろな諸問題を考察することは大変重要である。

２．研究の目的

偏微分方程式の解に対する Lp-Lq 評価式や解の一意接続性において重要な役割を担うカルレマン (Carleman) 不等式等の定量的評価式を新たに複素位相エネルギー法の観点から捉え直すことにより、数理物理学に現れる種々の方程式にたいする解の諸構造を考察する。特に、相対論的粒子の運動を記述するディラック作用素のスペクトル問題に関連する解の構造について複素位相エネルギー法の観点から総合的にとらえなおしあきらかにすることが目的である。

３．研究の方法

最初に、複素位相法エネルギー法において許容される重み関数のクラスを広げる試みの一つとして、ベッセル関数族に関するある重み付き 2 乗積分量のベッセル関数の次数によらない具体的評価式を極めて初等的な方法を用いて確立する。これらは数学解析の様々な局面に現れる基本的不等式を導く際に重要な役割を果たすことがわかっている。たとえば、シュレーディンガー作用素などの偏微分作用素の解の平滑化効果や全空間で定義された関数を球面へ制限して得られるトレース作用素の重み付き評価式等が挙げられる。この際、重み関数に関する条件は容易に検証出来るような形で与えることが重要である。その結果、各種の評価式に現れる最良定数の具体的評価を得ることが可能となる。

その応用の一つとして、一般n次元(n≧2)における相対論的粒子の振る舞いを記述するディラック(Dirac)作用素 $H=\alpha\cdot p+m\beta$ (m≧0) のレゾルベント $R(z)=(H-z)^{-1}$ に関する考察を行い、スペクトルパラメーターzが実軸に近づいたときの閾値も含めた一様極限吸収原理を確立する。その結果として、あるクラスのポテンシャル V(x)に対して H+V にたいする固有値の非存在を示すことが出来る。

４．研究成果

研究代表者大鍛治隆司は、Hubert Kalf 氏(ミュンヘン大学)･ 山田修宣氏(立命館大学)との共同研究において、ベッセル(Bessel)関数族 $J_\gamma(r)$に関連するある重み付き 2 乗積分についてベッセル関数の次数 γ によらない一様評価に関する新しい結果を得た。これは、複素位相法エネルギー法において許容される重み関数のクラスを広げる試みの一つと見なすことが出来るのみならず、いろいろな応用が期待される重要な結果である。 また、この評価式を導く証明方法は極めて初等的であるため、許容される重み関数のクラスは十分広くわかりやすい条件で記述できることも強調しておきたい。具体的には

重み関数$\phi(r)$は半直線上で非負単調減少な可積分関数であれば良く、従来の研究で見られたフーリエ変換に関する条件は必要ないことがわかった。即ち

$$I(\gamma, r) = \int_0^\infty \phi(rs)\, rs J_\gamma^2(rs)ds$$

とするとき、

$$I(m+\gamma) \leqq \max[I(\gamma, r), I(\gamma+1, r)]$$

が任意の $\gamma \geqq -1/2$ と非負整数mについて成り立つ。さらに、重み関数 ϕ がC^2で ϕ の 2 階までの微分に関するある自然な付帯条件の下では

$$I(m+\gamma) \leqq I(\gamma, r)$$

が任意の $\gamma \geqq -1/2$ と非負整数mについて成り立つ。

その応用として、シュレーディンガー作用素などの偏微分作用素の解の平滑化効果や全空間で定義された関数を球面へ制限して得られるトレース作用素の連続評価式を得ることが出来た。 また、同時に不等式に現れる最良定数の具体的評価をより広い重み関数のクラスに関してあたえることが可能となった。 実際、重み関数$\phi(r)$が非負単調減少かつ$\int_0^\infty \phi(r)\,dr < +\infty$をみたすとき、

$$r^{n-1}\int_{S(n-1)}|F[u](r\omega)|^2 dS(\omega) \leqq r^{-1}C(\gamma)\int_{R(n)}\phi^{-1}(|x|)|u(x)|^2 dx,$$

$$C(\gamma) = \max[\int_0^\infty \phi(s/r)s\ J_\gamma^2(s)ds,\ \int_0^\infty \phi(s/r)s\ J_{\gamma+1}^2(s)ds]$$

が成り立つことが示される。ここで、F[u]は u のフーリエ変換、S(n-1)は n-1 次元単位球面、R(n)は n 次元ユークリッド空間をあらわす。また、上記のトレース作用素のヘルダー連続性も示すことが出来る。なお、重み関数の具体例としては

$$\phi_{t,\sigma}(r) = 1/[r^{2t}(1+r^2)^\sigma],\quad t<1/2,\ t+\sigma>1/2$$

が挙げられる。

この応用の一つとして、数理物理学における最も重要な作用素の一つである相対論的粒子の運動を記述するディラック作用素 $H=\alpha\cdot p+m\beta$ $(m\geqq 0)$ について一般n次元($n\geqq 2$)における考察を行った。ここで、mは非負定数、$p=-i\nabla_x$, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$、$\beta$ は $N=2^{(n+1)/2}$ 次のエルミート行列で反交換関係

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}I_N,\ 0\leqq j, k\leqq n,\quad \alpha_0=\beta$$

を満たすものである。また。δ_{jk}はクロネッカーのデルタ、I_Nは N 次単位行列である。

この作用素をヒルベルト空間 $L^2(R^n)^N$ における自己共役作用素と見なしたとき、虚部が零でない複素数zにたいし、そのレゾルベント R(z)=(H-z)^{-1}に関する一様な極限吸収原理を確立することが出来た。ここで、極限吸収原理とは、そのレゾルベント R(z)が実軸を除いた複素平面内の領域内においてzが実軸に近づいた時の重み付き評価式のことである。従来の多くの研究は閾値(z=+m, -m)を除いた領域での局所的評価のみしか考察していないのにたいし。本研究では、複素変数zの実部が閾値に等しい場合も含まれる場合も込めて考察した。この場合の評価式を一様極限吸収原理といい、そうでない一様極限吸収原理の場合と比べると格段に困難を伴うことが予想される。それにも関わらず、我々の新しい重み関数を用いた評価式を適用することによって、ディラック作用素にたいする一様極限吸収原理を確立することが出来た。

その結果として作用素に現れる粒子の質量 m が零である場合(massless case)とそうでない場合(massive case)について、許容される重み関数（複素位相）のクラスが若干異なることを明らかにした。

即ち、 $0\leqq t<1/2$, $t+\sigma>1/2$ のとき z によらない定数 C が存在して

$$\|\phi_{t,\sigma}(|x|)(\alpha\cdot p-z)^{-1}\phi_{t,\sigma}(|x|)\| \leqq C$$

が任意の$z\in \mathbf{C}\setminus \mathbf{R}$ に対して成り立つ。

さらに、$m>0$, $n\geqq 3$, $0\leqq t<1/2$ のとき、zによらない定数 C が存在して

$$\|\phi_{t,1-t}(|x|)(\alpha\cdot p+m\beta-z)^{-1}\phi_{t,1-t}(|x|)\| \leqq C$$

が任意の$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$に対して成り立つ。ここで、$\|\ \|$はヒルベルト空間$L^2(\mathbb{R}^n)^N$における作用素ノルムである。

これらの２つの結果に加えて少し考察を加えれば、massiveの場合の方がmasslessの場合に比べてより狭い範囲の重み関数に対してしか成り立たないことがわかる。また、3次元以上と2次元では結果は少し異ならざるを得ないことも同時に明らかになった。

これらの結果から直ちに従う事実としては、あるクラスのポテンシャル項V(x)による摂動作用素H+Vが固有値を持たないことが示される。証明方法としては、従来、極限吸収原理を示すのに、全空間で定義された関数を球面へ制限して得られるトレース作用素が、全空間上の位数sが1/2より大きいソボレフ空間$H^s(\mathbb{R}^n)$から球面上の2乗可積分関数の空間への連続作用素であり、かつその作用素ノルムが球面半径に依存しないことを示す有界線型評価式が重要な役割を果たすことが知られていた。それを示すのには通常は、抽象的補間法を用いるのであるが、その場合は作用素のルムの評価の最良値を具体的に知ることは難しかったが、今回はそれらの議論を用いず回避し、それに変えて我々の新しい重み評価式を用いることにより閾値も込めた一様極限吸収原理を導くことに成功した。また重み評価式の初等的証明方法のおかげで作用素ノルムの具体的な評価も与えることが出来た。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① Hubert Kalf, Takashi Okaji and Osanobu Yamada, Explicit uniform bounds on integrals of Bessel functions and trace theorems for Fourier transforms、査読有、292巻、2019、106－120
DOI: 10.1002/mana.201700326
② Hubert Kalf, Takashi Okaji and Osanobu Yamada,　A note on uniform resolvent estimates of Dirac operators,　Memoirs of the Institute of Science and Engineering, Ritsumeikan University, 査読無,74巻、2015,1-9

〔学会発表〕（計　2　件）

① 大鍛治 隆司、Explicit uniform bounds on integrals of Bessel functions and trace theorems for Fourier transforms、名古屋微分方程式セミナー（招待講演）、2018
② 大鍛治 隆司、Dirac作用素のスペクトルに関する話題、代数解析奈良研究会（招待講演）、2016